

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина»
Кафедра Т и ПМ

Дипломный проект на тему:

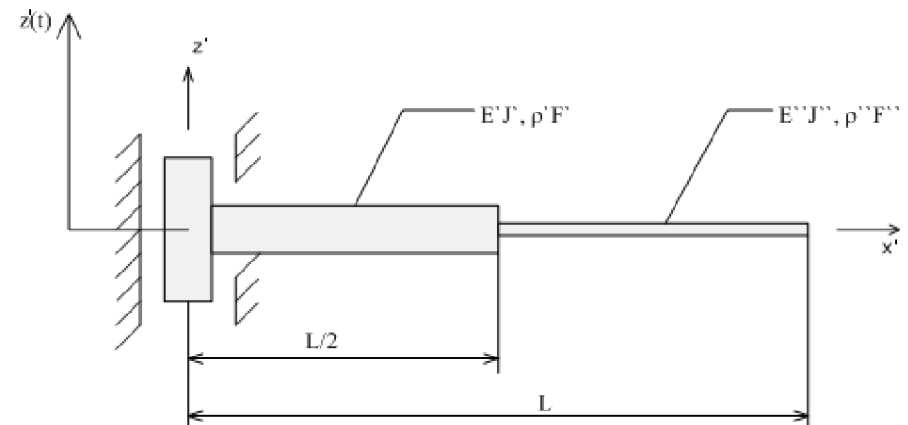
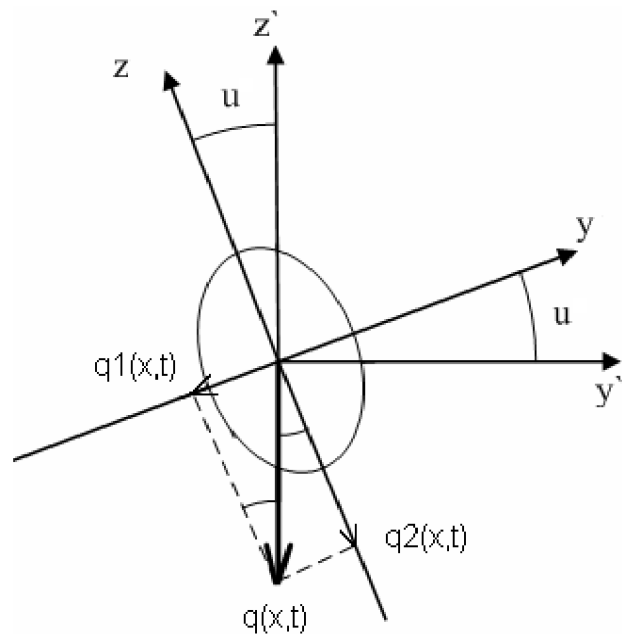
«Колебания стержней из нелинейно-упругих материалов»

Выполнила: Гусарова Н.В.
Руководитель: к.т.н., доцент Муницын А.И.

Уравнения изгибных колебаний стержня:

$$\rho \cdot F \cdot \frac{d^2}{dt^2} v(x, t) + \beta \cdot \rho \cdot F \cdot \frac{d}{dt} v(x, t) + \frac{d^2}{dx^2} Mz(x, t) = q_1(x, t)$$

$$\rho \cdot F \cdot \frac{d^2}{dt^2} w(x, t) + \beta \cdot \rho \cdot F \cdot \frac{d}{dt} w(x, t) + \frac{d^2}{dx^2} My(x, t) = q_2(x, t)$$



$$q_1(x, t) = \rho F \cdot \theta^2 \cdot A \cdot \sin(u) \cdot \cos(\theta \cdot t)$$

$$q_2(x, t) = \rho F \cdot \theta^2 \cdot A \cdot \cos(u) \cdot \cos(\theta \cdot t)$$

Выражения для деформации и напряжения :

$$\varepsilon = - \left(y \cdot \frac{d^2}{dx^2} v(x, t) + z \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x, t) \right)$$

$$\sigma = E \cdot \left[\varepsilon + \alpha \cdot \varepsilon^3 + \eta \cdot \frac{d}{dt} \varepsilon + \eta_3 \cdot \left(\frac{d}{dt} \varepsilon \right)^3 \right]$$

Выражения для моментов:

$$M_y = \int_F \sigma z dF \quad M_z = \int_F \sigma y dF$$

$$M_z(x, t) = E J_z \cdot \frac{d^2}{dx^2} v(x, t) + \alpha \cdot E J_{zz} \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} v(x, t) \right)^3 + 3 \alpha E J_{yz} \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} w(x, t) \right)^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} v(x, t) + \eta \cdot E J_z \cdot \frac{d^2}{dx^2} \frac{d}{dt} v(x, t) + \eta_3 \cdot E \cdot J_{zz} \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{d}{dt} v(x, t) \right)^3 + 3 \eta_3 \cdot E \cdot J_{yz} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \frac{d}{dt} v(x, t) \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{d}{dt} w(x, t) \right)^2$$

Безразмерные параметры:

$$v_* = \frac{v}{L} \quad w_* = \frac{w}{L} \quad x_* = \frac{x}{L} \quad t_* = \omega t \quad \omega = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{E' J_z'}{\rho' F'}} \quad \beta_* = \frac{\beta}{\omega} \quad \eta_* = \eta \omega \quad \eta_{3*} = \eta_3 \omega$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D1' + C \cdot D1''}{1 + M}} \quad t_{**} = \omega_0 t_*$$

Выражения для прогибов:

$$v(x, t) = \phi_1(t) \cdot \Psi(x) \quad w(x, t) = \phi_2(t) \cdot \Psi(x)$$

Выражения для моментов инерции сечений, близких к окружности:

$$J_y' = J_z'(1 + \varepsilon \delta_1') \quad J_{yy}' = J_{zz}'(1 + \varepsilon \delta_2') \quad J_{yz}' = J_{zz}'(1/3 + \varepsilon \delta_3')$$

Система уравнений в безразмерных переменных, полученная методом Бубнова-Галеркина:

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi_1(t) + \varepsilon \cdot B \cdot \frac{d}{dt}\phi_1(t) + \phi_1(t) + \varepsilon \cdot \gamma \cdot \left[\phi_2(t)^2 \cdot \phi_1(t) + \phi_1(t)^3 + \chi \cdot \left[\left(\frac{d}{dt}\phi_1(t) \right)^3 + \left(\frac{d}{dt}\phi_2(t) \right)^2 \cdot \frac{d}{dt}\phi_1(t) \right] \right] =$$

$$= \varepsilon \cdot p \cdot \sin(u) \cdot \cos(\theta \cdot t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi_2(t) + \varepsilon \cdot B \cdot \frac{d}{dt}\phi_2(t) + (1 + \varepsilon \cdot \delta) \cdot \phi_2(t) + \varepsilon \cdot \gamma \cdot \left[\phi_1(t)^2 \cdot \phi_2(t) + \phi_2(t)^3 + \chi \cdot \left[\left(\frac{d}{dt}\phi_2(t) \right)^3 + \left(\frac{d}{dt}\phi_1(t) \right)^2 \cdot \frac{d}{dt}\phi_2(t) \right] \right] =$$

$$= \varepsilon \cdot p \cdot \cos(u) \cdot \cos(\theta \cdot t)$$

Медленные переменные:

$$\phi_k = a_k \cos(\mu t + \alpha_k) \quad \dot{\phi}_k = -\dot{a}_k \mu \sin(\mu t + \alpha_k)$$

Применяя метод усреднения, получаем систему уравнений в медленных переменных:

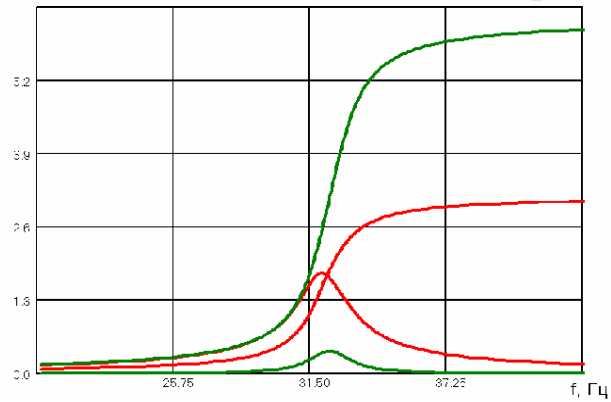
$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2} \varepsilon P \cos(u) \sin(\alpha_1) - \frac{1}{8} \varepsilon \gamma a_1 a_2^2 \sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{1}{2} \varepsilon B a_1 - \frac{3}{8} \chi a_1^3 - \frac{1}{8} \chi a_1 a_2^2 \cos 2(-\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{1}{4} \chi a_1 a_2^2$$

$$\dot{a}_2 = \frac{1}{2} \varepsilon P \sin(u) \sin(\alpha_2) - \frac{1}{8} \varepsilon \gamma a_2 a_1^2 \sin 2(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{1}{2} \varepsilon B a_2 - \frac{3}{8} \chi a_2^3 - \frac{1}{8} \chi a_2 a_1^2 \cos 2(-\alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{4} \chi a_2 a_1^2$$

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{1}{4} \varepsilon \gamma a_2^2 a_1 + \frac{3}{8} \varepsilon \gamma a_1^3 + \frac{1}{8} \varepsilon \gamma a_2^2 a_1 \cos 2(-\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{1}{2} P \cos(u) \cos(-\alpha_1) + \frac{1}{8} \chi a_2^2 a_1 \sin 2(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{1}{2} a_2 \delta + \frac{1}{4} \varepsilon \gamma a_1^2 a_2 + \frac{3}{8} \varepsilon \gamma a_2^3 + \frac{1}{8} \varepsilon \gamma a_1^2 a_2 \cos 2(-\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{1}{2} P \sin(u) \cos(-\alpha_2) - \frac{1}{8} \chi a_1^2 a_2 \sin 2(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Влияние различных параметров на вид АЧХ и ФЧХ:



1

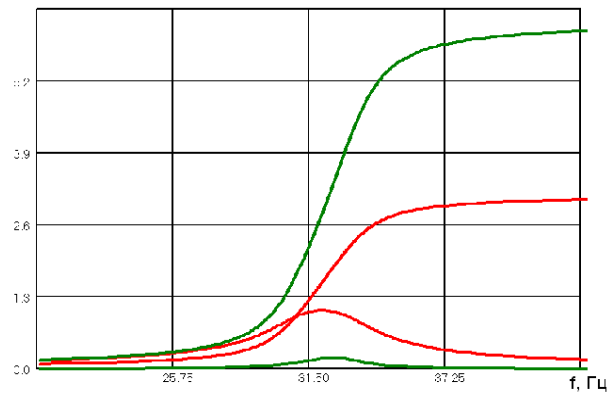
1 - $\chi=0$

2 - $\chi=200$, $\delta=0.045$, $\alpha=-0.3$

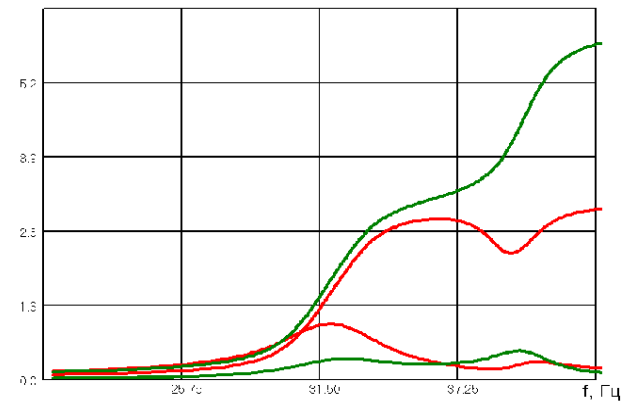
3 - $\chi=200$, $\delta=0.5$, $\alpha=-0.3$

4 - $\chi=200$, $\delta=0.045$, $\alpha=-1000$

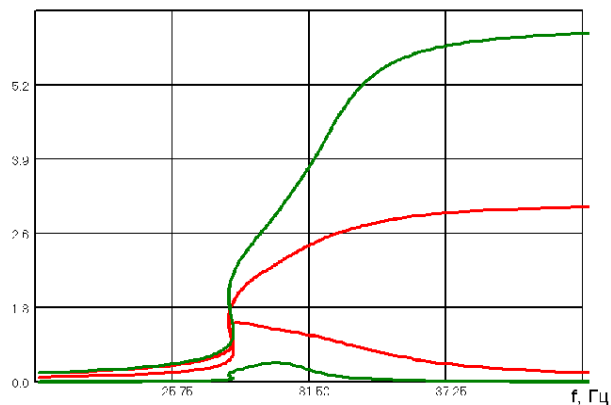
5 - $\chi=200$, $\delta=0.5$, $\alpha=-1000$



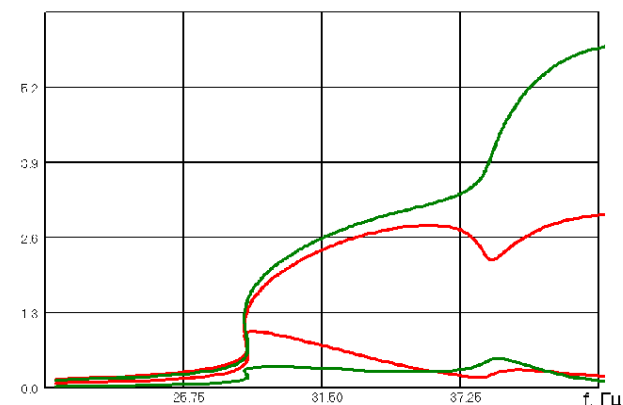
2



3



4



5

Сравнение экспериментальных и теоретических данных

$$\gamma = -0.3, \quad B = 0.06, \quad \chi = 200$$

$$E = 1.0925 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \alpha = -1.402, \quad \eta = 2.984 \cdot 10^{-4} \text{ с}, \quad \eta_3 = 2.461 \cdot 10^{-5} \text{ с}^3$$

$$\delta = 0.045, \quad u = -\pi/9$$

