

РАЗРАБОТКА ЛАБОРАТОРНОГО СТЕНДА ПО ИССЛЕДОВАНИЮ МОДЕЛЕЙ ТРЕНИЯ

Выполнил: студ. 5 курса

Киселёв А.Ю.

Руководитель:

Муницаын А.И.

Введение и постановка задачи

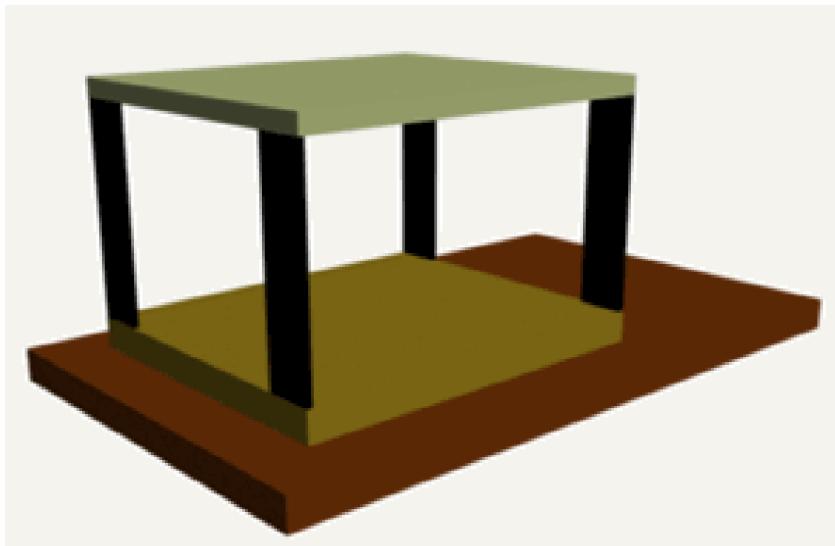
Одной из часто возникающих задач динамики систем и технологических процессов является исследование различных эффектов движения механических систем.

Целью дипломного проекта является разработка экспериментального лабораторного стенда по исследованию моделей трения. Данная цель основывается на проведении эксперимента по определению коэффициента трения в момент, когда груз, находящийся на верхней крышке лабораторного стенда, начинал и заканчивал движение.

В соответствии с указанной целью, в дипломе были поставлены следующие основные задачи:

- разработка математической модели для заданного закона движения основания;
- разработка математической модели с учётом динамических характеристик стенда;
- проведение эксперимента и обработка результатов;
- идентификация параметров сухого трения.

Для проведения экспериментальных исследований разработана конструкция на четырех гибких, жестко закрепленных стойках, к одной из которых подведен источник вибрации. Для определения коэффициента трения на верхнюю поверхность установки помещалась монета.



РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ ЗАДАННОМ ЗАКОНЕ ДВИЖЕНИЯ ОСНОВАНИЯ

За исходное уравнение примем следующее: $m_1 \cdot \ddot{x} = F_{TP}$

Представим $\ddot{x} = \dot{u} + \dot{v}$ и подставим в уравнение: $m_1 \cdot (\dot{u} + \dot{v}) = F_{TP}$

$v = \dot{x} = \frac{d}{dt}(A \cdot \sin(\theta \cdot t)) = m_1 \cdot A \cdot \theta \cdot \cos(\theta \cdot t)$ - скорость движения основания,
 u - скорость груза относительно основания.

$$m_1 \cdot \dot{u} - F_{TP} = m_1 \cdot A \cdot \theta \cdot \cos(\theta \cdot t)$$

Рассмотрим 2 случая, когда проскальзывания нет, и когда
проскальзывание есть.

1 случай. Проскальзывания нет.

$$u \equiv 0.$$

$$\text{Тогда, } F_{TP} = \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot sign(u) = m_1 \cdot A \cdot \theta \cdot \cos(\theta \cdot t).$$

$$\text{В результате получаем: } \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot A \cdot \theta$$

Так как проскальзывание отсутствует, то коэффициент μ будет
определяться по следующей формуле:

$$\mu = \frac{\theta \cdot A}{g}$$

2 случай. Проскальзывание есть.

$$m_1 \cdot \dot{u} + \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot sign(u) = m_1 \cdot A \cdot \theta \cdot \cos(\theta \cdot t + \varphi)$$

Принимаем $u = B \cdot \cos(\theta \cdot t)$ и подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} -m_1 \cdot B \cdot \theta \cdot \sin(\theta \cdot t) + \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot sign(B \cdot \cos(\theta \cdot t)) &= \\ = m_1 \cdot A \cdot \theta \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta \cdot t) + m_1 \cdot A \cdot \theta \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta \cdot t) \end{aligned}$$

Составляем систему уравнений. Для решения этой системы, воспользуемся методом Бубнова-Галёркина. Домножим первое уравнение на $\sin(\theta \cdot t)$ и возьмём интеграл по периоду колебаний и второе уравнение домножим на $\cos(\theta \cdot t)$ и тоже возьмём интеграл по периоду колебаний.

При этом нам потребуются интегралы от следующих выражений:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2 \cdot \cos(\tau) d\tau = 4 \cdot \frac{1}{\theta}, \quad \int_0^{2\pi} \cos(\tau)^2 d\tau = \frac{\pi}{\theta}$$

Подставляем полученные значения в систему уравнений:

$$B = -A \cdot \sin(\varphi)$$

$$\frac{4 \cdot \mu \cdot g \cdot sign(B)}{\pi \cdot \theta} = A \cdot \cos(\phi)$$

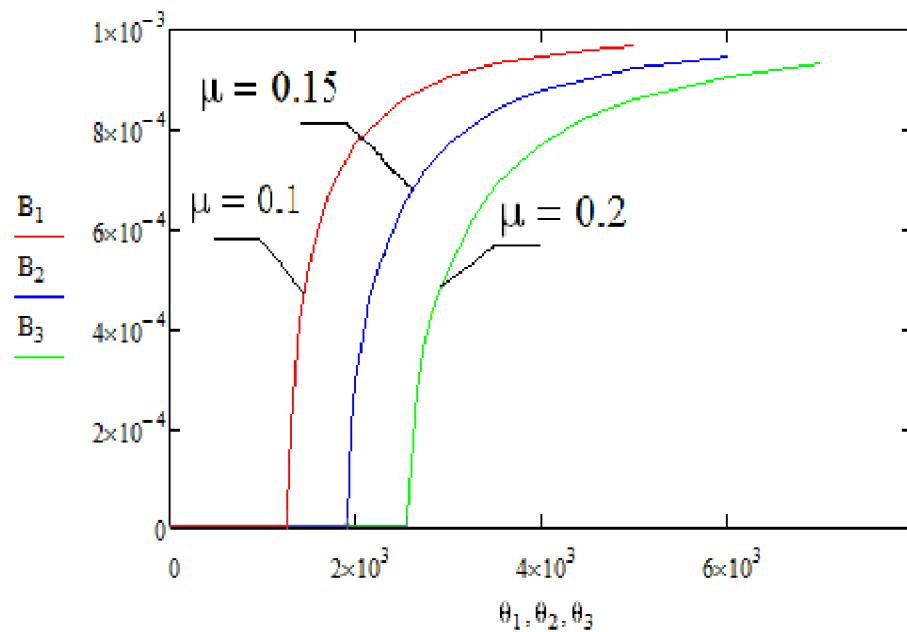
Складываем оба уравнения и находим коэффициент B :

$$B^2 + \left(\frac{4 \cdot g \cdot \mu}{\pi \cdot \theta} \right)^2 = A^2, \text{ отсюда } B = \sqrt{A^2 - \left(\frac{4 \cdot \mu \cdot g}{\pi \cdot \theta} \right)^2}$$

В этом случае, коэффициент трения определяется по следующей формуле:

$$\mu = \frac{\pi \cdot A \cdot \theta}{4 \cdot g}$$

Построим амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) для трёх различных значений коэффициента μ при $A=10^{-3}$ Н.



Как видно из графиков, форма зависимости не меняется, она лишь смещается вправо. Так же меняется точка, в которой график начинает расти. Это точка, в которой груз начинает движение.

Зная точки, на которых груз начинает движение, можно легко определить коэффициент трения. В данном случае, эксперимент не проводился, т. к. довольно сложно разработать лабораторный стенд, удовлетворяющий графикам, изображённым на рисунке

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ С УЧЁТОМ ДИНАМИКИ СТЕНДА

По аналогии с предыдущим пунктом, произведём вычисления с учётом жёсткости системы и её массы.

В качестве исходных уравнений, примем следующую систему из двух уравнений:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = F_{TP}$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + 2 \cdot k \cdot x_2 = -F_{TP} + A \cdot \sin(\theta \cdot t)$$

Представим $\ddot{x}_1 = \dot{u} + \dot{v}$ и подставим в уравнение: $m_1 \cdot (\dot{u} + \dot{v}) = F_{TP}$

$v = \dot{x}_2$ - скорость движения основания,

u - скорость груза относительно основания

Рассмотрим 2 случая, когда проскальзывания нет, и когда проскальзывание есть.

1 случай. Проскальзывания нет.

$$u \equiv 0$$

Тогда, $F_{TP} = m_1 \cdot \dot{v} = m_1 \cdot \ddot{x}$

В результате получаем: $(m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} + 2 \cdot k \cdot x = A \cdot \sin(\theta \cdot t)$

Принимаем $x_2 = C \cdot \sin(\theta \cdot t)$, подставляем в выше написанное уравнение и находим С:

$$C = \frac{A}{2 \cdot k - \theta^2 \cdot (m_1 + m_2)}$$

2 случай. Проскальзывание есть.

$$m_1 \cdot \dot{u} + \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot sign(u) = m_1 \cdot \dot{v} = m_1 \cdot \ddot{x}_2$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + 2 \cdot k \cdot x_2 - \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot sign(u) = A \cdot \sin(\theta \cdot t + \varphi_1)$$

Принимаем $u = B \cdot \cos(\theta \cdot t)$.

Так же раскроем x_2 и подставим в выше написанную систему уравнений:

$$x_2 = C \cdot \sin(\theta \cdot t) + D \cdot \cos(\theta \cdot t) = C_0 \cdot (\sin(\theta \cdot t) + \varphi_2)$$

$$-m_1 \cdot B \cdot \theta \cdot \sin(\theta \cdot t) + \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot sign(B \cdot \cos(\theta \cdot t)) = -m_1 \cdot C \cdot \theta^2 \cdot \sin(\theta \cdot t) + m_1 \cdot D \cdot \theta^2 \cdot \cos(\theta \cdot t)$$

$$-m_2 \cdot (C \cdot \theta^2 \cdot \sin(\theta \cdot t) + D \cdot \theta^2 \cdot \cos(\theta \cdot t)) + 2 \cdot k \cdot (C \cdot \sin(\theta \cdot t) + D \cdot \cos(\theta \cdot t)) -$$

$$-\mu \cdot m_1 \cdot g \cdot sign(B \cdot \cos(\theta \cdot t)) = A \cdot \sin(\theta \cdot t + \varphi_1)$$

Применяя метод Бубнова-Галёркина, получаем:

$$4 \cdot \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot sign(B) = -m_1 \cdot D \cdot \theta^2 \cdot \pi \quad (1)$$

$$-m_2 \cdot D \cdot \theta^2 \cdot \pi + 2 \cdot k \cdot D \cdot \pi - 4 \cdot \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot sign(B) = A \cdot \cos \varphi_1 \quad (2)$$

$$-m_2 \cdot C \cdot \theta^2 + 2 \cdot k \cdot C = A \cdot \sin \varphi_1 \quad (3)$$

$$-m_1 \cdot B \cdot \theta = m_1 \cdot C \cdot \theta^2 \quad (4)$$

Из уравнения (1) находим D:

$$D = -\frac{4 \cdot \mu \cdot g \cdot \text{sign}(B)}{\pi \cdot \theta^2}$$

Полученное выражение подставляем в уравнение (2):

$$-4 \cdot m_2 \cdot \mu \cdot g - \frac{8 \cdot k \cdot \mu \cdot g}{\theta^2} - 4 \cdot m_1 \cdot \mu \cdot g = A \cdot \cos \varphi_l$$

Данное выражение складываем с уравнением (3), возводим в квадрат и находим C:

$$(4 \cdot m_2 \cdot \mu \cdot g + \frac{8 \cdot k \cdot \mu \cdot g}{\theta^2} + 4 \cdot m_1 \cdot \mu \cdot g)^2 + (2 \cdot k \cdot C - m_2 \cdot C \cdot \theta^2)^2 = A^2$$

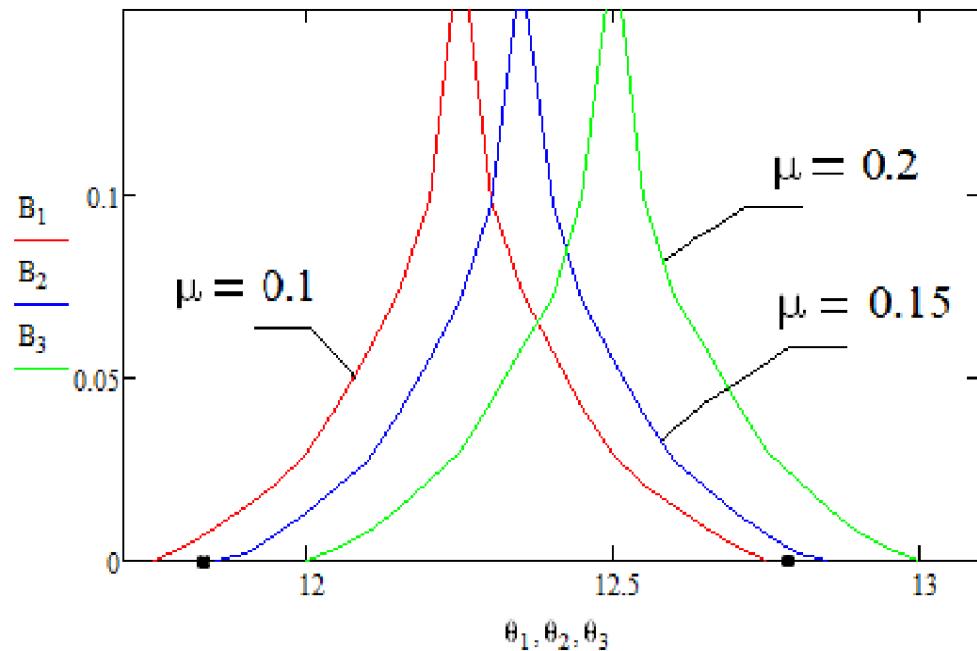
$$C = \frac{\sqrt{A^2 - (4 \cdot m_2 \cdot \mu \cdot g + \frac{8 \cdot k \cdot \mu \cdot g}{\theta^2} + 4 \cdot m_1 \cdot \mu \cdot g)^2}}{2 \cdot k - m_2 \cdot \theta^2}$$

$$C_0 = \sqrt{C^2 + D^2}$$

Из уравнения (4) находим B:

$$B = C \cdot \theta$$

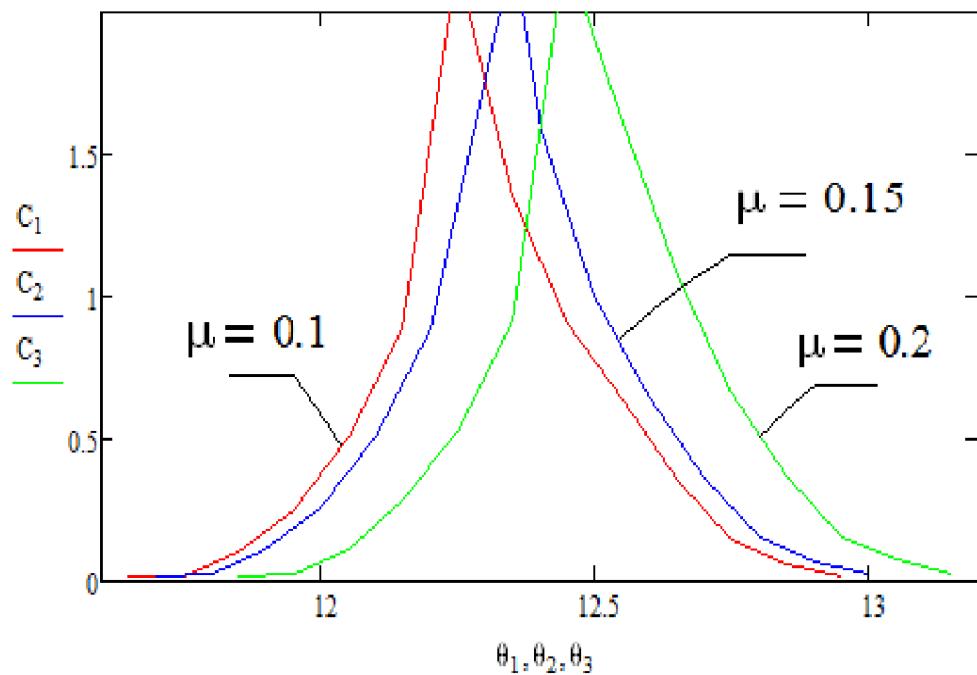
Амплитудно-частотные характеристики для трёх различных значений коэффициента μ представлены на следующем рисунке



Амплитудно-частотная характеристика скорости груза относительно основания

На графике так же представлены две точки - это результаты эксперимента. Таким образом, экспериментальное значение коэффициента трения находится между значениями 0.1 и 0.15.

Амплитудно-частотные характеристики для трёх различных значений коэффициента μ представлены на следующем рисунке

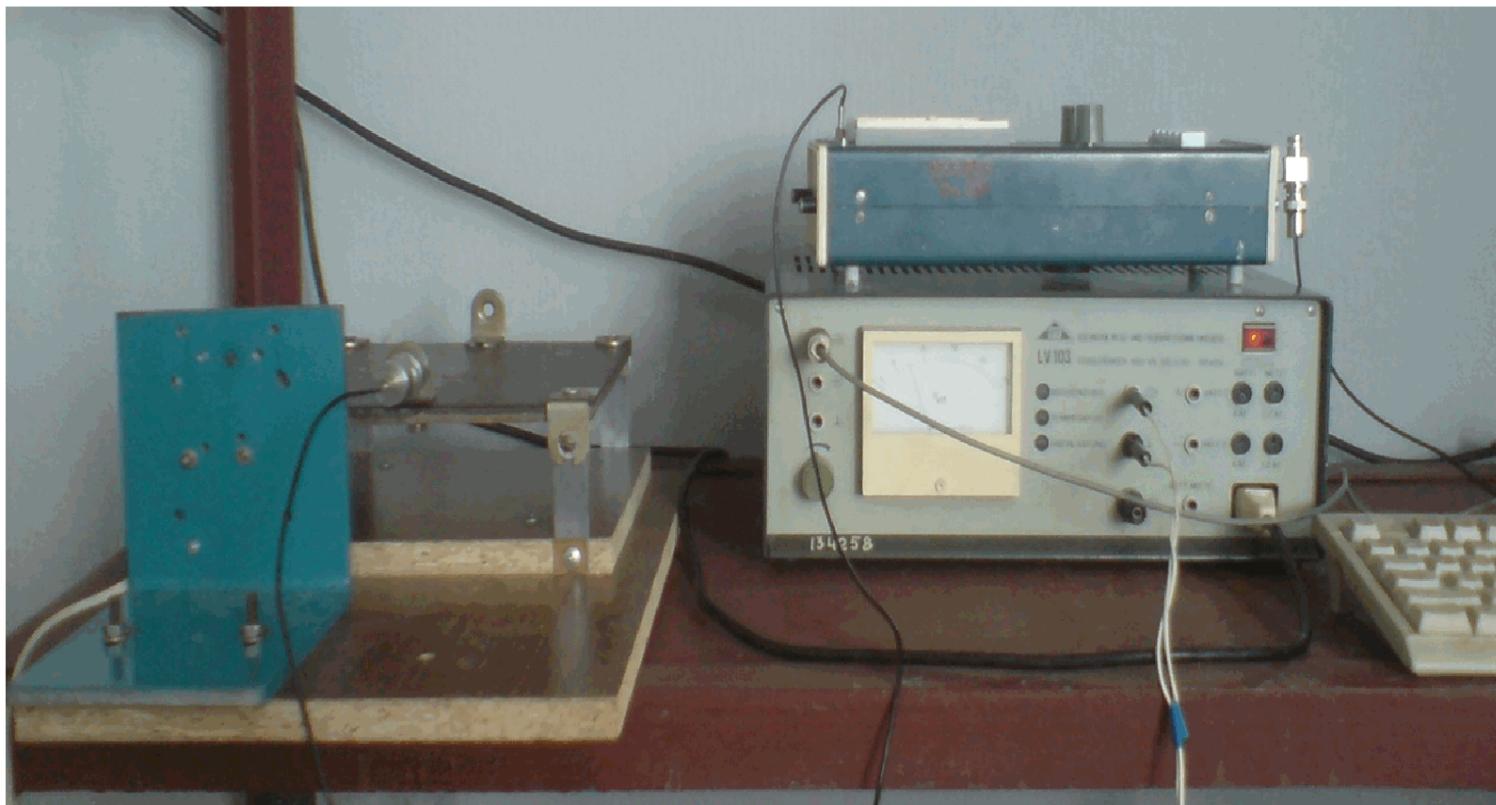


Амплитудно-частотная характеристика движения основания

Графики не ограничены сверху, поскольку в рассматриваемой модели не учитывалось вязкое трение.

ОПИСАНИЕ СТЕНДА. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для проведения экспериментальных исследований был разработан лабораторный стенд, состоящий из верхней крышки, четырёх гибких, жёстко закреплённых к основанию, жесткостей и основания. Так же для проведения эксперимента потребовались электромагнитный возбудитель, датчик вибрации, виброметр, усилитель мощности.



В качестве предварительного усилителя мощности использовался усилитель LV 103, в качестве датчика использовался пьезоэлектрический датчик KS 50. В качестве измерителя вибрации использовался виброметр Robotron 000 042.

Обработка, синхронная фильтрация и измерения уровня первой гармоники создавались программным путём. Генератор так же создавался программой.

Для преобразования цифрового сигнала в аналоговый использовался адаптер аналогового ввода-вывода NVL 08.

Эксперимент по определению коэффициента трения проводился с условием зафиксировать момент, когда груз, находящийся на верхней крышке лабораторного стенда, начинал и заканчивал движение.

По результатам эксперимента были сняты следующие данные:

- частота, на которой монета начинает движение $\theta = 11.8$ Гц
- частота, на которой монета заканчивает движение $\theta = 12.7$ Гц
- максимум амплитуды колебаний основания $\max C = 4.9$ м/с²
- пиковое значение амплитуды - 6.9 м/с²
- размах - 2.4 мм

В результате проведения эксперимента было установлено, что частоты, рассчитанные теоретически, практически совпадают с частотами, полученными экспериментальным путём.

Так как эксперимент проводился только один и не очень качественно, поэтому и результаты получились приблизительными.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ

Завершающей частью дипломного проекта является идентификация коэффициента трения.

Выведем формулу, по которой определим коэффициент трения .

Из условия, что $B = 0$, и при его подстановке в уравнение $B = C \cdot \theta$, получаем, что $C = 0$.

Так как $C=0$, то уравнение, по которому определяется коэффициент С, приравниваем к 0.

$$\frac{\sqrt{A^2 - (4 \cdot m_2 \cdot \mu \cdot g + \frac{8 \cdot k \cdot \mu \cdot g}{\theta^2} + 4 \cdot m_1 \cdot \mu \cdot g)^2}}{2 \cdot k - m_2 \cdot \theta^2} = 0$$

Так как знаменатель дроби не может быть равен 0, значит подкоренное выражение в числителе дроби равно 0.

$$A^2 - (4 \cdot m_2 \cdot \mu \cdot g + \frac{8 \cdot k \cdot \mu \cdot g}{\theta^2} + 4 \cdot m_1 \cdot \mu \cdot g)^2 = 0$$

Домножаем обе части уравнения на θ^2 , раскрываем скобки и упрощаем полученное выражение:

$$\theta^4 \cdot 16 \cdot \mu^2 \cdot g^2 \cdot (m_1 + m_2)^2 + \theta^2 \cdot (64 \cdot k \cdot \mu^2 \cdot g^2 \cdot (m_1 + m_2) - A) + 64 \cdot \mu^2 \cdot g^2 \cdot k^2 = 0$$

Решая это уравнение, получим формулу для определения коэффициента трения:

$$\mu^2 = \frac{A \cdot \theta^2}{\theta^4 \cdot 16 \cdot g^2 \cdot (m_1 + m_2)^2 + \theta^2 \cdot 64 \cdot k \cdot g^2 \cdot (m_1 + m_2) + 64 \cdot \mu^2 \cdot g^2 \cdot k^2}$$

Подставляя в это уравнение следующие значения, получаем два различных значения коэффициента трения:

$$A = 10^{-3} \text{ H} \quad g = 9.81 \text{ } \text{м/с}^2 \quad k = 72 \text{ } \text{Н/м} \quad m_1 = 0.01 \text{ кг} \quad m_2 = 2 \text{ кг}$$

$$\theta_1 = 11.8 \text{ Гц} \quad \theta_2 = 12.7 \text{ Гц}$$

$$\mu_1 = 0.11$$

$$\mu_2 = 0.12$$

Как мы видим, значения коэффициента трения получились практически такие же, что и полученные по результатам эксперимента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За время выполнения дипломного проекта был проведён обзор литературы, касающийся общих вопросов динамики конструкций, вопросов движения тел на вибрирующем основании, вопросов сухого трения, расчётов амплитудно-частотных характеристик.

Многочисленные работы подтверждают актуальность темы, необходимостью создания новых разработок в области изучения трения, как сухого, так и вязкого.

В ходе выполнения дипломного проекта была разработана модель экспериментального лабораторного стенда для определения модели трения, был проведён эксперимент, в результате которого получены файлы экспериментальных данных, содержащих значения частот, на которых груз начинает и заканчивает своё движение. Были проведены разработки математических моделей при заданном законе движения основания и с учётом динамики стенда, построены амплитудно-частотные характеристики для трёх значений коэффициента трения, произведена идентификация коэффициента трения. Разработка расчётной модели исследуемой системы выполнена на основе классических методов теории колебаний. В результате получилось, что значение коэффициента трения находится в интервале от 0.11 до 0.12. Для уточнения значения коэффициента трения, нужно провести большее число экспериментов.

В экономической части дипломного проекта был проведён функционально-стоимостной анализ, служащий для поиска эффективных решений в процессе разработки экспериментального лабораторного стенда при сохранении и повышении их качества и полезности, уменьшении затрат.

В разделе «Безопасность и экологичность проекта» для обеспечения оптимальных условий работы были рассмотрены потенциальные опасности при проведении эксперимента на лабораторном стенде и меры по их предотвращению.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ