

Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Ивановский государственный энергетический университет
имени В.И. Ленина»

Кафедра теоретической и прикладной механики

Прочность и жесткость при прямом изгибе

Методические указания

Иваново 2011

Составитель Ю.Е. Филатов

Редактор М.А. Ноздрин

Настоящие методические указания предназначены для самостоятельного изучения и использования при выполнении расчетно-проектировочных работ по курсам "Сопротивление материалов" и "Прикладная механика" (ч. 1). Они могут быть использованы для подготовки к экзаменам по указанным курсам студентами всех специальностей Ивановского государственного энергетического университета как дневной, так и заочной форм обучения.

Утверждены цикловой методической комиссией ЭМФ

Рецензент
кафедра теоретической и прикладной механики
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический
университет имени В.И. Ленина»

1. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ. НАГРУЗКИ

Изгиб стержней является самым распространенным видом деформации элементов машин и строительных конструкций. Стержни, работающие на изгиб, называют балками. Балки воспринимают усилия от одних деталей и передают другим.

Эти усилия, являющиеся количественной мерой механического взаимодействия двух различных тел, называют внешними усилиями или рабочей нагрузкой.

Усилия (обобщенные силы) по характеру действия на свободное тело бывают двух видов:

Сила – сообщает свободному (незакрепленному) телу поступательное движение, когда ее линия действия проходит через центр массы тела. Сила характеризуется точкой приложения, линией действия, величиной.

Пара сил – две равные, параллельные, встречно направленные силы (или момент), которые сообщают незакрепленному телу вращательное движение. Пара сил характеризуется плоскостью действия (ее положением), величиной (моментом), равной произведению одной из сил на плечо, т.е. кратчайшее расстояние между ними.

Эти два вида усилий связаны между собой. Сила произвольного положения (линия действия которой не проходит через центр масс тела) сообщает незакрепленному телу и поступательное и вращательное движение. Приведение этой силы к центру масс тела на основании теоремы о параллельном переносе сил приводит к силе и паре сил. Вращающее действие силы характеризуется моментом силы. Он равен произведению силы на плечо – кратчайшее расстояние от точки, относительно которой определяется момент, до линии действия силы.

В зависимости от площади приложения нагрузки по сравнению с размерами тела (по степени локализации) их представляют или сосредоточенными F, M (площадь действия мала), или распределенными (площадь действия нагрузки соизмерима с размерами тела). Распределенную нагрузку при расчете стержней обычно характеризуют интенсивностью по длине бруса:

$$q = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta l}; \quad m = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta l}.$$

Усилия, воспринимаемые балкой, называют активными, так как их величина и направление непосредственно не зависят

от других, действующих на рассматриваемую балку, нагрузок. Это, например, вес тела, усилия в зубчатом зацеплении и т.п. Активные усилия при составлении расчетных схем обычно определены.

Элементы конструкций, которым балка передает усилия, для балки выполняют роль связей. (*Связи – это все то, что препятствует перемещению тел.*) Усилия, передаваемые балкой, называют *реактивными усилиями* – это усилия, возникающие в связях. В инженерных конструкциях связи чаще всего реализуются в виде опор.

Будем рассматривать изгиб стержней под действием плоской системы сил. Обычно в балках встречаются виды опор, приведенные на рис. 1. На схемах указаны возможные, разрешаемые этими опорами перемещения стержня в плоскости (двойные стрелки) и возникающие в опорах реакции (простые стрелки). При этом запрещенным поступательным перемещениям соответствуют реактивные силы, а запрещенным угловым перемещениям – реактивные моменты.

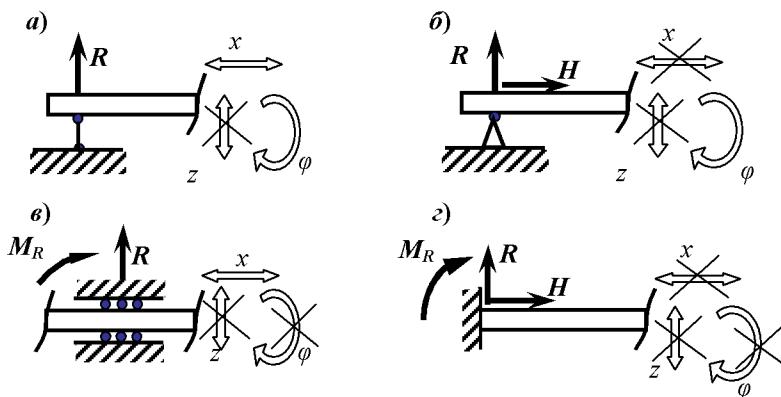


Рис. 1. Виды опор в плоскости:
 а – шарниро-подвижная; б – шарниро-неподвижная; в – направляющая; г – защемление

Шарниро-подвижная (рис. 1,а) запрещает вертикальное перемещение, то есть реализуется одна связь, возникает вертикальная реакция.

Шарниро-неподвижная (рис. 1,б) запрещает вертикальное и горизонтальное перемещения, то есть реализуются две связи, возникают вертикальная и горизонтальная реакции.

Направляющая (рис. 1,в) запрещает вертикальное поступательное и угловое перемещения, то есть реализуются две связи, возникают вертикальная реактивная сила и реактивный момент.

Зашемление или заделка (рис. 1,г) запрещает все три перемещения в плоскости, то есть реализуются три связи, возникают вертикальная и горизонтальная реактивные силы и реактивный момент.

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно на стержень наложить три связи, то есть в статически определимой балке возможны только такие комбинации опор, при которых общее число связей равно трем. Обычно встречается только два вида таких балок (рис. 2): шарнирные двухпорные, где одна опора шарнирно-неподвижная (рис. 1,б), другая шарнирно-подвижная (рис. 1,а), и консольные с одним жестким защемлением (рис. 1,г). Двухпорные балки могут быть без консольных участков.

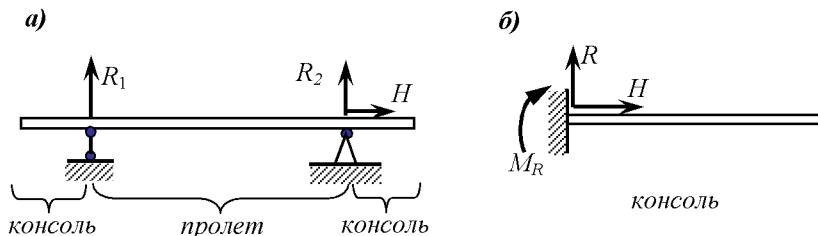


Рис. 2. Статически определимые балки

Реакции связей зависят от действующих на балку активных сил, дополняя систему сил до уравновешенной. Обычно они определяются на первом этапе расчета.

Нахождение реакций связей требует решения задачи статики. Известно, что для плоской системы сил можно составить только три независимых уравнения равновесия по одному из трех вариантов:

1) Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух (не параллельных) координатных осей равнялись нулю и сумма моментов сил относительно любой точки, лежащей в плоскости действия сил, равнялась нулю.

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum M_0(F_i) = 0.$$

2) Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно двух произвольных точек равнялись нулю и сумма проекций всех сил на ось (не перпендикулярную прямой, проходящей через эти точки) равнялась нулю.

$$\sum M_A(F_i) = 0; \quad \sum M_B(F_i) = 0; \quad \sum X_i = 0.$$

3) Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно трех произвольных точек, не лежащих на одной прямой, равнялись нулю.

$$\sum M_A(F_i) = 0; \quad \sum M_B(F_i) = 0; \quad \sum M_C(F_i) = 0.$$

Расчет реакций необходимо сопровождать проверкой правильности расчета путем составления еще одного, дополнительного уравнения равновесия.

2. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ

При изгибе стержня происходит искривление его продольной оси и поперечные сечения поворачиваются относительно друг друга вокруг осей, перпендикулярных продольной оси. При этом часть волокон по одну сторону от продольной оси испытывает растяжение, а по другую сторону – сжатие. Продольная ось лежит в нейтральном слое, длина которого не меняется и который отделяет зону сжатия от зоны растяжения.

Упругие твердые тела восстанавливают свои размеры и форму после снятия нагрузки, то есть их деформация является обратимой. Это показывает, что внутри тел имеются внутренние силы – силы взаимодействия между соседними частицами (молекулами, атомами), которые противодействуют внешним усилиям и восстанавливают форму тела после их снятия. Какие-то силы взаимодействия между частицами тела существуют и при отсутствии нагружения. Однако для расчетов важно знать только те дополнительные силы взаимодействия, которые появляются в результате нагружения.

Внутренние усилия – это дополнительные усилия взаимодействия двух частей одного тела, возникающие при действии на него внешней нагрузки.

Для определения внутренних усилий применяют метод сечений, моделирующий разрушение твердого тела.

Пусть имеем произвольное тело, нагруженное системой внешних сил, находящихся в равновесии (рис. 3,а). Мысленно рассечем это тело плоскостью на 2 части и рассмотрим равновесие одной из частей, например правой. На этот элемент тела действует некоторая часть системы внешних сил, а именно имеющих на нем точку приложения (рис. 3,б). Эти силы могут быть уравновешены только за счет внутренних усилий (рис. 3,в), действующих в проведенном сечении. (При этом внутренние усилия являются внутренними только по отношению ко всему телу, а по отношению к отдельным частям тела они выступают как внешние силы, как реакция связи одной части тела по отношению к другой.)

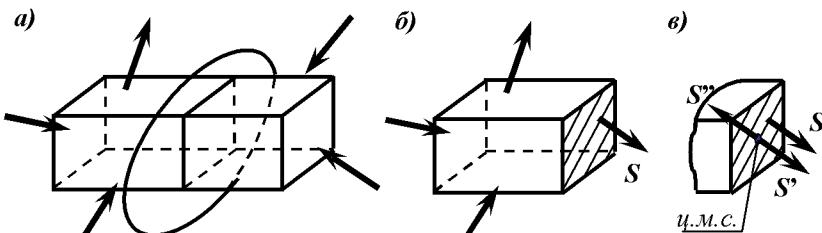


Рис. 3. Метод сечений

Итак, метод сечений – единственный метод для определения внутренних усилий – состоит из четырех этапов:

- 1) Мысленно проводится сечение там, где нужно определить внутренние усилия.
- 2) Мысленно отбрасывается одна из частей тела со всеми внешними силами, которые действуют на эту часть тела.
- 3) Заменяется действие отброшенной части тела на оставшуюся часть соответствующими внутренними усилиями.
- 4) Составляются уравнения равновесия сил для оставшейся части тела, из которых находятся внутренние усилия.

Чтобы запомнить последовательность этапов, рекомендуется использовать мнемоническое правило "РОЗУ": 1) Рассекаем, 2) Отбрасываем, 3) Заменяем, 4) Уравновешиваем.

Силы взаимодействия двух частей одного тела (внутренние силы) являются распределенными. При использовании метода сечений их заменяют главным вектором S' , приложенным в центре тяжести сечения, и главным моментом $S''S$ (рис. 3,в). Для определения главного вектора и главного момента внутренних

сил надо составить уравнения равновесия сил для одной (любой) части тела, которая, как и все тело, находится в состоянии равновесия.

Необходимо отметить, что внутренние силовые факторы S и M являются, с одной стороны, уравновешивающими усилиями для системы внешних сил, действующих на рассматриваемую (правую) часть тела, так как внутренние силы дополняют внешние до равновесия, а с другой – внутренние силовые факторы являются равнодействующими усилиями для системы внешних сил, действующих на отброшенную (левую) часть тела, заменяя их действие на рассматриваемую часть. Очевидно, что внутренние силовые факторы, действующие в сечении на каждую из частей тела, равны по величине и противоположны по направлению на основании 3-го закона Ньютона (действие равно противодействию), то есть рассматривая одну из частей тела, учитывают всю систему внешних сил и особенности ее приложения.

Для составления уравнений равновесия при определении внутренних усилий необходимо ввести систему координат. При расчете стержней обычно определяются усилия в поперечных сечениях, то есть перпендикулярных продольной оси бруса. В этих сечениях начало координат помещают в центр масс сечения. Ось x совмещают с продольной осью стержня, т. е. перпендикулярно сечению (положительное направление – от сечения), ось y – горизонтальная и z – вертикальная совмещают с главными центральными осями инерции сечения, в частности, с осями симметрии сечения. Положительные направления оси y – для левой части от плоскости чертежа (на наблюдателя), оси z – вниз. (Каждая ось может быть получена по двум другим при соблюдении их очередности поворотом предыдущей оси против часовой стрелки при взгляде со стороны последующей оси.)

Спроектировав главный вектор S и главный момент M внутренних сил на эти оси координат, получим компоненты, имеющие следующие обозначения (рис. 4):

$S_x = N$ – нормальная (продольная или осевая) сила; возникает при растяжении или сжатии стержня;

Q_y, Q_z – поперечные (перерезывающие) силы; возникают при сдвиге (срезе) стержня соответственно в направлении осей y и z ;

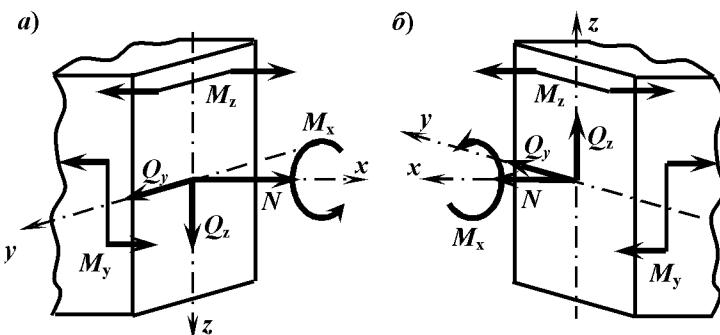


Рис. 4. Компоненты внутренних усилий:
а – левая отсеченная часть; б – правая отсеченная часть

$M_x = M_{kp}$ – крутящий момент; возникает при кручении стержня;

M_y, M_z – изгибающие моменты; возникают при изгибе стержня в главных плоскостях xoz и xyo .

Чтобы знак внутренних усилий не зависел от действий расчетчика, направление внутренних усилий при выполнении третьего этапа метода сечений выбирается строго определенным образом, а именно положительным в соответствии с правилом знаков сопротивления материалов по рис. 4, где указаны положительные направления внутренних сил совпадают с положительным направлением осей. Внутренние моменты положительны, если направлены против часовой стрелки при взгляде с конца оси, перпендикулярной плоскости действия момента.

При плоском изгибе удобнее использовать вариант этих правил знаков (рис. 5).

Поперечная сила положительна, если она стремится вращать рассматриваемую часть балки вокруг любой точки внутри этой части балки по часовой стрелке (рис. 5, а).

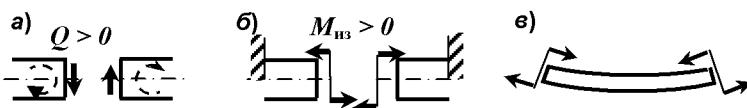


Рис. 5. Правила знаков для внутренних усилий при изгибе:
а – для поперечной силы; б, в – для изгибающих моментов

Изгибающий момент положителен, если балка изгибается выпуклостью вниз (рис. 5,б, в), то есть сжимаются верхние волокна (эпюра изгибающих моментов строится на сжатых волокнах).

Следует также иметь в виду, что при подробном выполнении метода сечений, когда уравнения равновесия записываются в виде $\sum \bar{F} = 0$; $\sum \bar{M} = 0$ (сумма усилий равна нулю), используются правила знаков статики для всех членов уравнений (в том числе и внутренних усилий).

Для выявления опасного сечения стержня, то есть сечения, где внутренние усилия имеют наибольшее значение (там наиболее вероятно разрушение), строятся графики их изменения вдоль продольной оси. Эти графики называют эпюрами. При построении эпюры проводят ось (базу) параллельно оси стержня. Перпендикулярно оси с учетом знака (как в математике, положительные значения ординат откладывают вверх или вправо, отрицательные вниз или влево) в масштабе откладывают значения ординат. Эпюры штрихуются линиями перпендикулярно оси, то есть каждый отрезок линии в масштабе показывает величину внутреннего усилия в соответствующем сечении. На эпюрах принято проставлять числовые значения характерных ординат и на поле эпюры в кружке – знак усилия.

В зависимости от направления нагрузки относительно бруса и, соответственно, вида и числа действующих внутренних усилий различают такие виды изгибов (см. рис. 4).

1) По наличию внутренних усилий дополнительно к изгибающему моменту:

- чистый изгиб – действует только изгибающий момент;
- поперечный изгиб – дополнительно действует поперечная сила; это деформация под действием сил, линия действия которых пересекает продольную ось стержня перпендикулярно ей, или пар сил (моментов), плоскость действия которых проходит через продольную ось;
- продольный изгиб – дополнительно действует нормальная сила (этот термин применяют для гибких стержней, нагруженных внешней продольной силой, когда происходит потеря устойчивости, и первоначальная форма равновесия становится неустойчивой).

2) По числу изгибающих моментов:

- прямой изгиб – действует один изгибающий момент;

– косой изгиб – действуют два изгибающих момента.

Прямой изгиб – деформация стержня при выполнении следующих условий:

- действует плоская система сил;
- она совпадает с главной плоскостью бруса;
- силы перпендикулярны продольной оси.

Косой изгиб имеем при нарушении первого и/или второго условий. Он рассматривается как одновременное действие двух прямых изгибов в двух взаимно перпендикулярных главных плоскостях.

3) По форме изогнутой продольной оси бруса:

- плоский изгиб – изогнутая продольная ось бруса плоская кривая;
- пространственный изгиб.

Пусть имеем балку (рис. 6), нагруженную плоской уравновешенной системой сил:

$$\sum F_z = 0, \quad F_1 - F_2 + F_3 = 0; \quad \sum M = 0, \quad -F_1a + F_3b = 0.$$

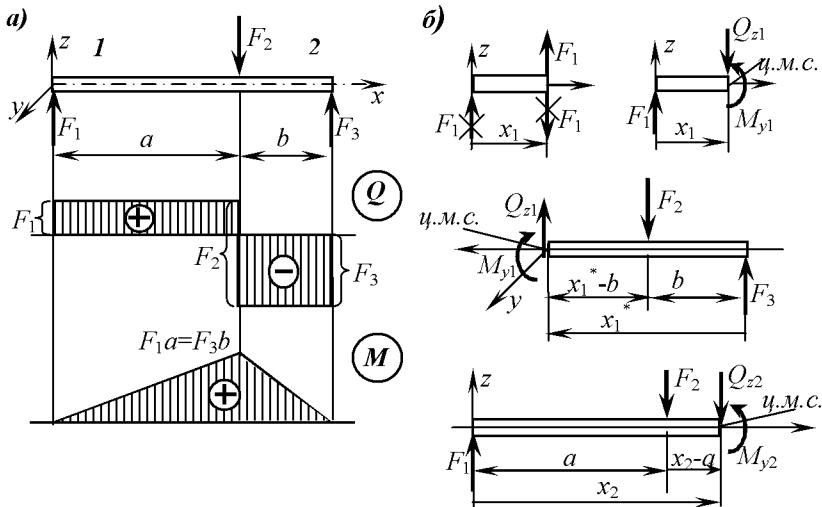


Рис. 6. Построение эпюор поперечных сил Q и изгибающих моментов M для балки:

a – расчетная схема и эпюры; *б* – рассматриваемые части бруса

Определим внутренние усилия, для чего применим метод сечений. Проведем мысленно произвольное (по положению) по-

перечное сечение на левом участке; отбросим правую часть балки вместе с силами F_2 и F_3 , заменим её действие на левую часть внутренними усилиями. Чтобы выяснить, какие внутренние усилия возникнут в сечении, приведем внешнюю силу F_1 к центру тяжести сечения; при этом получим силу, перпендикулярную продольной оси, и пару сил. Чтобы их уравновесить, в сечении должны действовать поперечная (перерезывающая) сила и изгибающий момент. Направление этих внутренних усилий выбираем положительным по правилу знаков (рис. 5).

Составим уравнения равновесия для левой части балки ($0 \leq x_1 \leq a$): сумму проекций сил на ось z

$$\sum F_z = 0, \quad F_1 - Q_1 = 0 \rightarrow Q_1 = F_1;$$

и сумму моментов относительно центра масс сечения

$$\sum_{\text{умс}} M = 0, \quad -F_1 x_1 + M_{y1} = 0 \rightarrow M_{y1} = F_1 x_1.$$

Рассматривая аналогично равновесие правой части балки для того же сечения ($b \leq x_1^* \leq a+b$), получим

$$\sum F_z = 0, \quad -F_2 + F_3 + Q_1 = 0, \quad Q_1 = F_2 - F_3.$$

$$\sum_{\text{умс}} M = 0, \quad F_3 x_1^* - F_2(x_1^* - b) - M_{y1} = 0, \quad M_{y1} = F_3 x_1^* - F_2(x_1^* - b).$$

Если использовать уравнения равновесия для всей балки, то легко доказать тождественность обеих пар результатов. Видно, что на первом участке эпюра поперечных сил описывается уравнением прямой, параллельной оси x балки, а эпюра изгибающих моментов – уравнением наклонной прямой.

Аналогичным образом рассматривается второй участок между силами F_2 и F_3 ($a \leq x_2 \leq a+b$):

$$Q_2 = F_1 - F_2 = -F_3.$$

$$M_{y2} = F_1 x_2 - F_2(x_2 - a),$$

$$M_{y2}(x_2 = a) = F_1 a, \quad M_{y2}(x_2 = a+b) = F_1(a+b) - F_2 b.$$

Рассматривая равновесие правой части или применяя уравнения равновесия для всей балки, можно получить

$$M_{y2}(x_2 = a) = F_1 a = F_3 b, \quad M_{y2}(x_2 = a+b) = 0.$$

Построение эпюр ведется так же, как для первого участка. При изгибе расчет на прочность ведется, как правило, по изги-

бающему моменту, то есть в этой задаче опасное сечение под силой F_2 , где $M_y = \max$.

Анализируя выражения для внутренних усилий, можно записать

$$Q_z = \sum F_{z \text{ рассм.ч.}}$$

Поперечная (перерезывающая) сила численно равна алгебраической сумме *внешних сил*, действующих на рассматриваемую часть балки и взятых со знаком плюс, если они стремятся вращать эту часть балки вокруг центра масс сечения по часовой стрелке (рис. 6).

$$M_{изг} = \sum_{imc} M(F_{\text{внешн}})_{\text{рассм.ч.}}$$

Внутренний изгибающий момент численно равен алгебраической сумме моментов относительно центра масс сечения от *внешних усилий*, действующих на рассматриваемую часть балки и взятых со знаком плюс, если они сжимают верхние волокна.

Для проверки правильности построения эпюор при изгибе используются правила, вытекающие из дифференциальных зависимостей между усилиями.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ УСИЛИЯМИ ПРИ ИЗГИБЕ

Пусть имеется балка (рис. 7), нагруженная плоской произвольной уравновешенной системой внешних усилий:

$$\sum \bar{F} = 0, \quad \sum \bar{M} = 0.$$

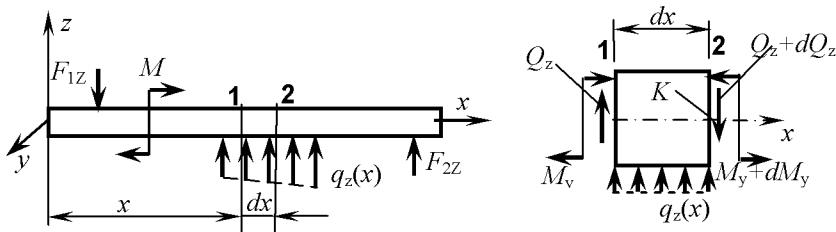


Рис. 7. К выводу дифференциальных зависимостей между усилиями при изгибе

Выберем правую систему координат. Вырежем из этой балки элементарный участок dx так, чтобы на нем не было сосредоточенной нагрузки. На этот элемент действует распределенная поперечная внешняя сила, которую ввиду малости участка dx можно считать равномерной, $q(x) = const$. В проведенных сечениях будут действовать внутренние усилия: в левом Q_z и M_y , в правом $Q_z + dQ_z$ и $M_y + dM_y$, где dQ_z и dM_y – приращения поперечной силы и изгибающего момента при переходе от одного сечения к другому. Направление внутренних усилий принято положительным.

Рассмотрим равновесие этого элемента, спроектировав все силы на ось z :

$$\sum F_z = 0, \quad Q_z + qdx - (Q_z + dQ_z) = 0.$$

Откуда

$$dQ_z/dx = q.$$

Производная от поперечной силы по длине балки равна интенсивности распределенной нагрузки в данном сечении.

Составим уравнение моментов относительно центра масс правого сечения (т. K):

$$\sum_y M = 0, \quad -M_y - Q_z dx - (qdx) \frac{dx}{2} + (M_y + dM_y) = 0.$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$dM_y/dx = Q_z.$$

Первая производная от изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе, действующей в этом сечении.

(Если есть распределенная моментная нагрузка, то

$$dM_y/dx = Q_z + m_y)$$

Объединяя две дифференциальные зависимости, получим

$$d^2 M_y / dx^2 = q.$$

Эти зависимости были получены Д.И. Журавским. Они используются для качественного (без расчета) построения эпюор внутренних усилий или для проверки правильности построения, так как позволяют установить ряд особенностей в эпюрах в зависимости от действующей нагрузки. При этом используется геометрический смысл производной: первая производная равна

тангенсу углу касательной, проведенной к кривой в данной точке, и осью абсцисс, то есть

$$\operatorname{tg} \alpha_Q = \frac{dQ}{dx} = q; \quad \operatorname{tg} \alpha_M = \frac{dM}{dx} = Q.$$

Приведем наиболее важные связи между действующими нагрузками и видом эпюор внутренних усилий (рис. 8):

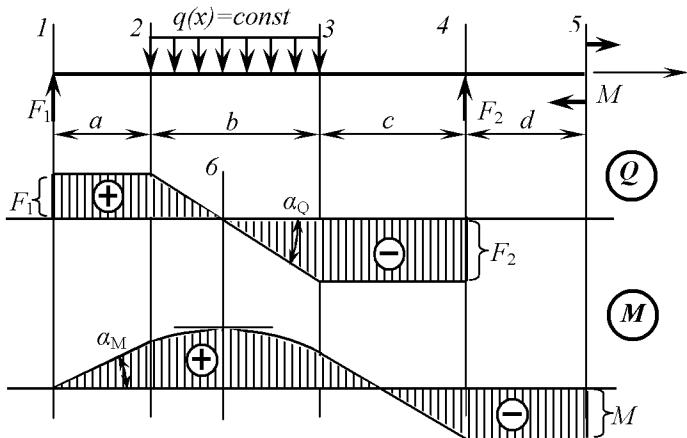


Рис. 8. Зависимость вида эпюр внутренних усилий при изгибе от действующей нагрузки

1. На участке, где нет распределенной нагрузки, эпюра Q ограничена прямой, параллельной продольной оси, а эпюра M – прямой, наклонной к оси (рис. 6, 8, участки a, b, c).

2. На участке, где действует равномерно распределенная нагрузка q , эпюра Q ограничена наклонной прямой, а эпюра M – квадратичной параболой; при этом парабола имеет выпуклость навстречу распределенной нагрузке q (рис. 8, участок b).

3. В сечениях, где приложены сосредоточенные силы (здесь $\Delta x \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$), на эпюре Q будут скачки на величину этих сил, а на эпюрах M – изломы без скачков (рис. 8, сечения 1, 4).

4. В сечениях, где приложены сосредоточенные пары сил или моменты (здесь $m \rightarrow \infty$), на эпюре Q изменений не будет, а на эпюре M – будут скачки на величину этих моментов (рис. 8, сечение 5).

5. Если силы (сосредоточенные или распределенные, а также реакции) направлены вниз, то при увеличении абсциссы сечения x эпюра Q убывает (рис. 8, участок b).

6. Если эпюра Q положительна или моменты направлены по часовой стрелке, то при увеличении x эпюра M возрастает и тем сильнее, чем больше Q , и наоборот (рис. 8, участки a , b , c , d).

7. В сечениях, где $Q=0$, касательная к эпюре M параллельна продольной оси, и здесь эпюра M имеет местный или общий экстремум (максимум или минимум) (рис. 8, сечение 6).

Пример 1

Для балки на двух опорах (рис. 9), нагруженной на части пролета равномерно распределенной поперечная силой интенсивностью q , найти опасное сечение и расчетное усилие.

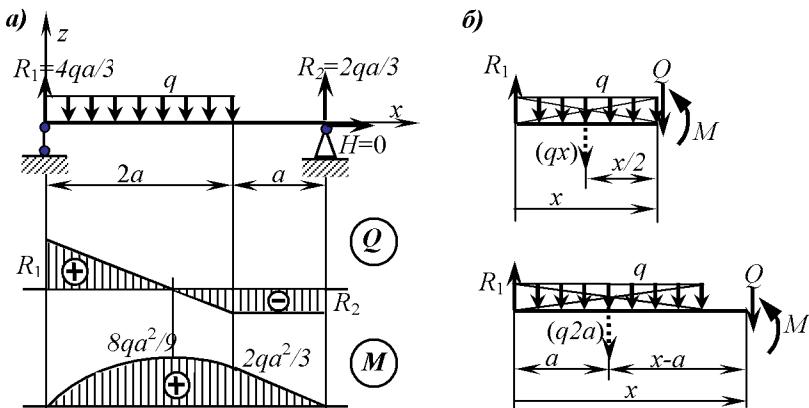


Рис. 9. Расчетная схема балки и эпюры поперечных сил Q_z и изгибающих моментов M_y (а), рассматриваемые части бруса (б)

- Определение реакций опор.

На левой шарнирно-подвижной опоре возникает только вертикальная реакция, на правой шарнирно-неподвижной опоре – горизонтальная и вертикальная реакции. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_x = 0, \quad H = 0;$$

$$\sum M_A = 0, \quad -(q \cdot 2a) \cdot a + R_2 \cdot 3a = 0;$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_1 \cdot 3a + (q \cdot 2a) \cdot 2a = 0.$$

$$\text{Отсюда } H = 0, \quad R_1 = \frac{4}{3}qa, \quad R_2 = \frac{2}{3}qa.$$

Здесь при вычислении моментов распределенную нагрузку заменяем равнодействующей $F = q \cdot 2a$, приложенной в середине левого участка. После определения реакций необходимо сделать проверку, составив еще одно дополнительное уравнение равновесия:

$$\sum F_z = 0, \quad R_1 - q \cdot 2a + R_2 = \frac{4}{3}qa - 2qa + \frac{2}{3}qa = 0.$$

- Определение внутренних усилий на левом участке.

Используем метод сечений, рассматривая равновесие левой части балки. Применяя соответствующие правила, получим

$$0 \leq x \leq 2a, \quad Q = +R_1 - qx, \quad M = R_1 x - (qx)x/2.$$

При вычислении момента применяем для q тот же прием, что и при вычислении реакций (показано штрихами). Строим эпюры Q и M на первом участке: эпюра Q будет ограничена на-клонной прямой линией, а эпюра M – квадратичной параболой.

$$x = 0, \quad Q = R_1 = \frac{4}{3}qa, \quad M = 0;$$

$$x = 2a, \quad Q = R_1 - q2a = \frac{4}{3}qa - q2a = -\frac{2}{3}qa,$$

$$M = R_1 2a - q \frac{(2a)^2}{2} = \frac{8}{3}qa^2 = \frac{2}{3}qa^2.$$

Видно, что эпюра Q проходит на этом участке через ноль, следовательно, на эпюре M будем иметь максимум, так как вторая производная от момента ($d^2M/dx^2 = q$) отрицательна. Найдем этот максимум. Его поиск ведется по правилам высшей математики.

$$\frac{dM}{dx} = Q = R_1 - qx_m = 0, \quad x_m = \frac{R_1}{q} = \frac{4}{3}a;$$

$$M_{\max} = M(x = x_m) = R_1 \frac{4}{3}a - \frac{q}{2} \left(\frac{4}{3a} \right)^2 = \frac{8}{9}qa^2.$$

- Определение внутренних усилий на правом участке.

Применяя метод сечений, получим выражение внутренних усилий для левой части балки:

$$2a \leq x \leq 3a, \quad Q = R_1 - q \cdot 2a = \frac{4}{3}qa - 2qa = -\frac{2}{3}qa = -R_2;$$

$$M = R_1x - (q \cdot 2a)(x - a).$$

Эпюра Q ограничена прямой, параллельной продольной оси (базе), а эпюра M – наклонной прямой:

$$x = 2a, \quad M = R_1 \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = \frac{2}{3}qa^2,$$

$$x = 3a, \quad M = R_1 \cdot 3a - q \cdot 2a \cdot 2a = 0.$$

Для проверки правильности построения эпюр (рис. 9) нужно убедиться в соответствии эпюр изложенным выше правилам (1 – 7). Опасное сечение для этой балки при $x = \frac{4}{3}a$, где

$$M = \frac{8}{9}qa^2 = \max.$$

Пример 2

Для консольной балки (рис. 10), нагруженной сосредоточенным моментом $M = 0,5 \text{ кНм}$ и сосредоточенной силой $F = 1 \text{ кН}$, найти опасное сечение и расчетное усилие.

- Определение реакций опоры.

В жестком защемлении возможны три реактивных усилия: R, H, M_R .

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_x = 0, \quad H = 0;$$

$$\sum F_z = 0, \quad R - F = 0, \quad R = F = 1 \text{ кН};$$

$$\sum M_0 = 0, \quad M_R + M - F(a+b) = 0,$$

$$M_R = F(a+b) - M = 0,5 \text{ кНм}.$$

Для проверки составим дополнительное уравнение моментов:

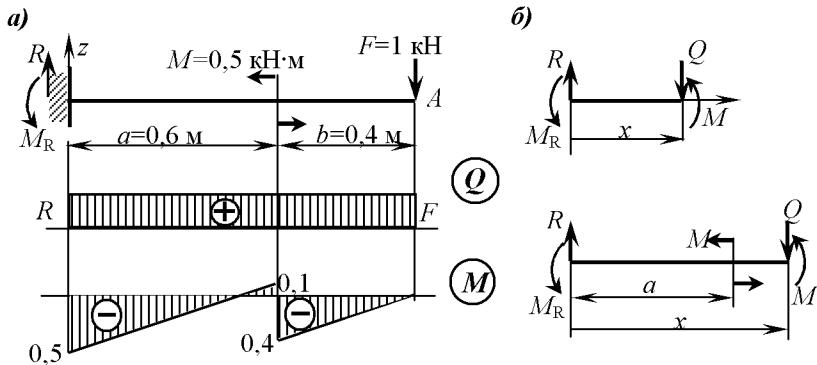


Рис. 10. Расчетная схема балки и эпюры поперечных сил Q_z и изгибающих моментов M_y (а), рассматриваемые части бруса (б)

$$\sum M_A = 0, \quad M_R - R(a+b) + M = 0,5 - 1 \cdot (0,6 + 0,4) + 0,5 = 0.$$

- 1-й участок.

$$0 \leq x \leq a, \quad Q = R = 1 \text{ кН};$$

$$M = -M_R + Rx;$$

$$M(x=0) = -M_R = -0,5 \text{ кНм},$$

$$M(x=a) = -M_R + Ra = -0,5 + 1 \cdot 0,6 = 0,1 \text{ кНм}.$$

Эпюра Q ограничена прямой, параллельной базе, а эпюра M – наклонной прямой.

- 2-й участок.

$$a \leq x \leq a+b, \quad Q = +R = +1 \text{ кН};$$

$$M = -M_R + Rx - M;$$

$$M(x=a) = M_R + Ra - M = -0,5 + 1 \cdot 0,6 - 0,5 = -0,4 \text{ кНм},$$

$$M(x=a+b) = -M_R + (a+b) - M = 0.$$

Характер эпюр на втором участке (рис. 10) аналогичен первому, при этом прямые, ограничивающие эпюру M , на обоих участках параллельны, так как на этих участках величина Q одинакова.

Проверка правильности построения эпюр проводится аналогично предыдущему. Опасное сечение для этой балки в заделке $M_{\max} = 0,5 \text{ кНм}$.

4. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ БРУСА

Пусть в поперечных сечениях бруса действуют только нормальные напряжения. Известно, что нормальные напряжения в сечении связаны с нормальной силой и изгибающими моментами.

$$N = \int_A \sigma dA; \quad M_y = \int_A \sigma z dA; \quad M_z = \int_A \sigma y dA .$$

Рассмотрим брус, в поперечных сечениях которого возникает нормальная сила N и изгибающие моменты M_y и M_z . Эти внутренние силовые факторы могут возникать при действии внешней силы, параллельной продольной оси, и внешних пар сил в продольных плоскостях.

Промоделируем варианты такого нагружения на резиновом брусе, нанеся предварительно на его гранях продольные и поперечные прямые линии (рис. 11).

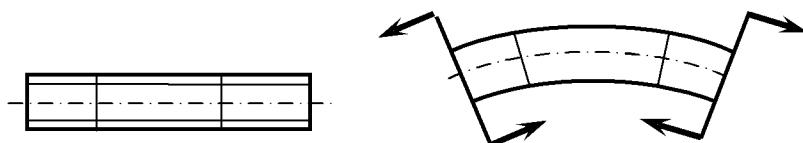


Рис. 11. Деформация бруса при нагружении парами сил (изгиб)

Из опыта следует, что продольные линии будут искривляться, удлиняясь или укорачиваясь, а прямые поперечные линии, оставаясь прямыми и поперечными, будут поворачиваться. Распространим результаты наблюдений, полученные на поверхности бруса, на весь объем бруса, введя гипотезу плоских сечений (Якова Бернулли). Также введем еще две гипотезы.

1. Гипотеза плоских сечений: сечения плоские и поперечные до нагружения остаются таковыми и при нагружении.
2. Гипотеза о ненадавливании волокон: при искривлении продольных волокон нормальных напряжений в поперечном направлении нет.

По второй гипотезе волокно находится в условиях простого растяжения или сжатия (линейного напряженного состояния), для которого закон Гука имеет вид $\sigma = \varepsilon E$. Строго говоря, нормальные напряжения в поперечном направлении должны

действовать, чтобы уравновесить нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса, которые поворачиваются относительно друг друга (рис. 12). Отношение нормальных продольных напряжений к нормальным поперечным напряжениям имеет порядок радиуса кривизны волокна.

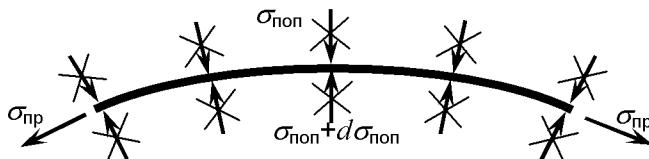


Рис. 12. К гипотезе о ненадавливании волокон

3. Модуль продольной упругости (Юнга) при растяжении и сжатии одинаков.

Выделим из бруса (в общем, любого поперечного сечения) элемент длиной dx и рассмотрим его деформацию (рис. 13). Левое сечение для упрощения вывода зафиксируем. Правое сечение переместится по отношению к левому и займет положение, показанное пунктирной линией, причем после деформации сечение останется плоским, согласно принятой гипотезе о плоских сечениях. Перемещение сечения можно представить как результат его поступательного движения вдоль оси x и поворота относительно осей y и z (пока произвольных).

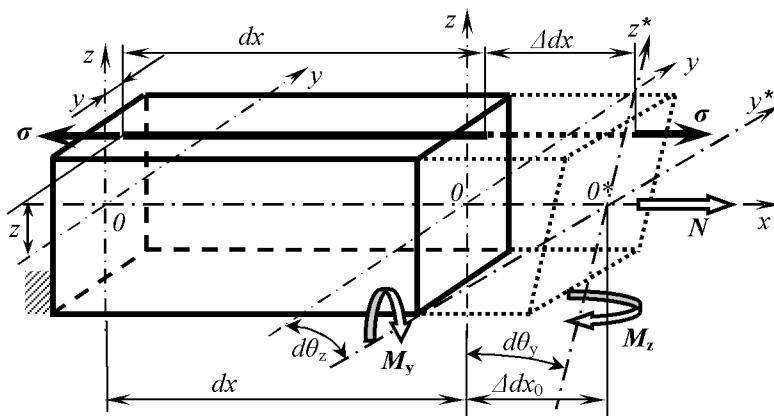


Рис. 13. Деформация элемента бруса длиной dx

Удлинение любого волокна, проходящего через точку сечения с координатами y и z , будет

$$\Delta x = \Delta x_0 + d\theta_y z + d\theta_z y ,$$

где Δx_0 – удлинение рассматриваемого волокна за счет поступательного движения поперечного сечения; $d\theta_y$ – угол поворота сечения относительно оси y ; $d\theta_z$ – удлинение рассматриваемого волокна за счет поворота сечения относительно оси y ; $d\theta_z$ – угол поворота сечения относительно оси z ; $d\theta_z y$ – удлинение волокна в результате этого поворота.

Тогда относительная линейная деформация произвольного волокна

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{dx} = \frac{\Delta x_0}{dx} + \frac{d\theta_y}{dx} z + \frac{d\theta_z}{dx} y .$$

Согласно закону Гука для линейного напряженного состояния, между напряжением и продольной деформацией в этом случае существует следующая зависимость:

$$\sigma = \varepsilon E = E \frac{\Delta x}{dx} = E \left(\frac{\Delta x_0}{dx} + \frac{d\theta_y}{dx} z + \frac{d\theta_z}{dx} y \right) .$$

Эта зависимость показывает распределение нормальных напряжений в поперечном сечении. Как и эпюра деформаций, эпюра нормальных напряжений представляет собой плоскость. Для практического применения формулу преобразуем, используя интегральные зависимости между силовыми факторами и нормальным напряжением.

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E \left(\frac{\Delta x_0}{dx} + \frac{d\theta_y}{dx} z + \frac{d\theta_z}{dx} y \right) dA = \\ = E \left(\frac{\Delta x_0}{dx} \int_A dA + \frac{d\theta_y}{dx} \int_A z dA + \frac{d\theta_z}{dx} \int_A y dA \right) .$$

$$M_y = \int_A \sigma z dA = \int_A E \left(\frac{\Delta x_0}{dx} + \frac{d\theta_y}{dx} z + \frac{d\theta_z}{dx} y \right) z dA = \\ = E \left(\frac{\Delta x_0}{dx} \int_A z dA + \frac{d\theta_y}{dx} \int_A z^2 dA + \frac{d\theta_z}{dx} \int_A y z dA \right) .$$

$$M_z = \int_A \sigma y dA = \int_A E \left(\frac{\Delta dx_0}{dx} + \frac{d\theta_y}{dx} z + \frac{d\theta_z}{dx} y \right) y dA = \\ = E \left(\frac{\Delta dx_0}{dx} \int_A y dA + \frac{d\theta_y}{dx} \int_A yz dA + \frac{d\theta_z}{dx} \int_A y^2 dA \right).$$

Здесь за знак интеграла вынесены величины, не зависящие от положения волокна (или точки в поперечном сечении) и остающиеся постоянными при интегрировании. Интегралы, входящие в соотношение, являются геометрическими характеристиками плоских поперечных сечений. Они учитывают размеры и форму поперечного сечения, но по-разному в зависимости от находящегося при нем сомножителя. Введем обозначения:

$A = \int_A dA$ – площадь сечения;

$S_y = \int_A zdA$, $S_z = \int_A ydA$ – статические моменты площади

сечения;

$J_y = \int_A z^2 dA$, $J_z = \int_A y^2 dA$ – осевые моменты инерции сече-
ния;

$J_{yz} = \int_A yzdA$ – центробежный момент инерции сечения.

Тогда запись интегральных зависимостей между внутренними силовыми факторами и нормальным напряжением упрощается:

$$N = \int_A \sigma dA = E \frac{\Delta dx_0}{dx} A + E \frac{d\theta_y}{dx} S_y + E \frac{d\theta_z}{dx} S_z;$$

$$M_y = \int_A \sigma zdA = E \frac{\Delta dx_0}{dx} S_y + E \frac{d\theta_y}{dx} J_y + E \frac{d\theta_z}{dx} J_{yz};$$

$$M_z = \int_A \sigma ydA = E \frac{\Delta dx_0}{dx} S_z + E \frac{d\theta_y}{dx} J_{yz} + E \frac{d\theta_z}{dx} J_z.$$

Эти зависимости можно упростить выбором положения осей в поперечном сечении. Рассмотрим свойства геометрических характеристик поперечных сечений.

Площадь $A > 0$ и не зависит от положения осей.

Статические моменты площади сечения зависят от положения осей в поперечном сечении $S_y <> 0$; $S_z <> 0$. Выберем оси так, чтобы $S_y = 0$ и $S_z = 0$. Такие оси называются центральными, так как при этом точка их пересечения совпадает с центром площади (массы) сечения.

Осьевые моменты инерции сечения зависят от положения осей, но всегда $J_y > 0$; $J_z > 0$.

Центробежный момент инерции сечения $J_{yz} <> 0$. Выберем оси так, чтобы $J_{yz} = 0$. Такие оси называются главными.

Таким образом, при решении задачи оси y и z приняты как главные центральные оси. Тогда получим

$$N = \int_A \sigma dA = \frac{\Delta dx_0}{dx} EA; \quad \frac{\Delta dx_0}{dx} = \frac{N}{EA};$$

$$M_y = \int_A \sigma z dA = \frac{d\theta_y}{dx} EJ_y; \quad \frac{d\theta_y}{dx} = \frac{M_y}{EJ_y};$$

$$M_z = \int_A \sigma y dA = \frac{d\theta_z}{dx} EJ_z; \quad \frac{d\theta_z}{dx} = \frac{M_z}{EJ_z}.$$

Последние формулы можно использовать для определения перемещений от внутренних усилий. Подставляя эти выражения в формулу нормальных напряжений в поперечном сечении, получим

$$\boxed{\sigma = \varepsilon E = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y.}$$

Как видно, расчетные напряжения, возникающие в упругом брусе при нагружении, не зависят от материала, из которого он изготовлен, а зависят от внутренних силовых факторов, геометрических характеристик сечения бруса и положения точки в сечении.

Напомним, что оси y и z – главные центральные оси инерции сечения, для которых $S_y = 0$, $S_z = 0$; $J_{yz} = 0$. Здесь вид эпюры нормальных напряжений не зависит от формы контура поперечного сечения, в расчете форма поперечного сечения учитывается косвенно через интегральные геометрические характеристики.

Так как объемная эпюра нормальных напряжений представляет собой плоскость, то имеется линия – нейтральная (нулевая), где нормальные напряжения равны нулю. Она разделяет зоны растяжения и сжатия. Линия, нормальная к ней, – линия с наибольшей скоростью изменения напряжений (линия градиента напряжений). Опасной точкой является точка сечения, наиболее удаленная от нейтральной линии.

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Определения (рис. 14)

1. Площадь сечения:

$$A = \int_A dA.$$

Размерность – квадрат длины. Площадь $A > 0$ и не зависит от положения осей.

Для сложных (составных) фигур выполняется соотношение $A_{\Sigma} = \sum_i A_i$ – площадь сечения составной фигуры равна сумме площадей составляющих фигур.

2. Статические моменты площади сечения:

$$S_y = \int_A z dA, \quad S_z = \int_A y dA.$$

Размерность – куб длины.

Статические моменты площади сечения зависят от положения осей в поперечном сечении: $S_y > 0; S_z < 0$.

Для сложных (составных) фигур выполняется соотношение

$$S_{j\Sigma} = \sum_i S_{ji}, \text{ где } j = \{y, z\}.$$

Понятие статического мо-

мента площади в неявном виде вводится в теоретической механике. Пусть имеем по размеру и форме сечения пластину постоянной толщины t с удельным весом γ . Составим выражение моментов сил тяжести G относительно оси y :

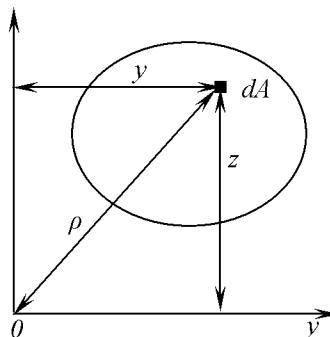


Рис. 14. К определению геометрических характеристик фигур

$$M_y = \int_A z dG = \int_A z \gamma t dA = \gamma t \int_A z dA = \gamma t S_y .$$

С другой стороны, известно, что $M_y = z_c G = z_c \gamma t A = \gamma t S_y$,
то есть $S_y = z_c A$, где z_c – координата центра площади сечения.

Если $z_c = 0$, то есть ось y – центральная, то $S_y = 0$.

Для сложных (составных) фигур имеем

$$z_{c\Sigma} = \sum_i z_{ci} \cdot A_i / \sum_i A_i , \quad y_{c\Sigma} = \sum_i y_{ci} \cdot A_i / \sum_i A_i .$$

3. Моменты инерции сечения:

осевые (экваториальные): $J_y = \int_A z^2 dA$, $J_z = \int_A y^2 dA$;

полярный: $J_0 = \int_A \rho^2 dA$;

центробежный: $J_{yz} = \int_A y z dA$.

Размерность – длина в четвертой степени.

Моменты инерции сечения зависят от положения осей.
Оевые и полярный моменты инерции всегда положительны.
Центробежный момент инерции $J_{yz} > 0$.

Для сложных (составных) фигур выполняется соотношение

$$J_{j\Sigma} = \sum_i J_{ji} , \text{ где } j = \{y, z, yz, \rho\} .$$

Из связи полярных и декартовых координат следует

$$J_0 = J_y + J_z$$

– сумма осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки их пересечения.

Ранее было введено понятие главных осей инерции сечения, для которых $J_{yz} = 0$. Частным случаем этих осей являются оси симметрии. Для доказательства возьмем симметричную фигуру, например тавр (рис. 15).

Пусть ось z – ось симметрии, а ось y – нормальная к ней. Фигуру можно считать состоящей из двух частей: 1 – правая и 2 – левая; $A_1 = A_2$.

Выделим в них малые площадки, расположенные симметрично. Для этих площадок $y_1 = -y_2$, $z_1 = z_2$.

Для правой части

$$J_{yz1} = \int_{A_1} y_1 z_1 dA = - \int_{A_2} y_2 z_2 dA = -J_{yz2}.$$

Для всего тавра $J_{yz} = J_{yz1} + J_{yz2} = 0$.

Итак, ось симметрии и любая ось, нормальная к ней, образуют систему главных осей инерции.

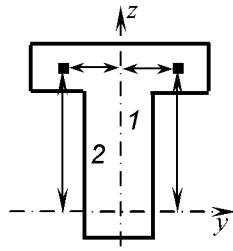


Рис. 15. Свойство осей симметрии

4. Моменты сопротивления сечения (используются в условиях прочности):

осевые (экваториальные): $W_y = J_y / |z|_{\max}$, $W_z = J_z / |y|_{\max}$;

полярный: $W_0 = J_0 / |\rho|_{\max}$.

Размерность – куб длины.

Оевые и полярный моменты сопротивления сечения зависят от положения осей, и они всегда положительны.

Для сложных (составных) фигур, как правило, выполняется соотношение

$$W_{j\Sigma} \neq \sum_i W_{ji}, \text{ где } j = \{y, z, \rho\}.$$

5. Радиусы инерции сечения:

осевые: $i_y = \sqrt{J_y / A}$, $i_z = \sqrt{J_z / A}$;

полярный: $i_0 = \sqrt{J_0 / A}$.

Размерность – длина.

Оевые и полярный радиусы инерции сечения зависят от положения осей, и они всегда положительны.

Для сложных (составных) фигур выполняется соотношение

$$i_{j\Sigma} \neq \sum_i i_{ji}, \text{ где } j = \{y, z, \rho\}.$$

Вычисление геометрических характеристик фигур

Сечение – прямоугольник $h \times b$ (рис. 16).

Площадь $A = h \times b$.

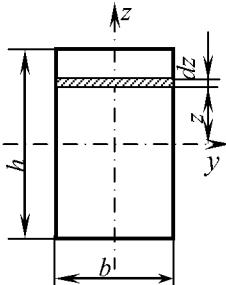


Рис. 16. К расчету геометрических характеристик прямоугольника

Статические моменты площади сечения относительно центральных осей z, y $S_y = S_z = 0$.

Центробежный момент инерции сечения относительно осей симметрии z, y $J_{yz} = 0$.

Определим осевой момент инерции сечения относительно центральной оси y . Для этого выделим прямоугольную элементарную площадку толщиной dz на расстоянии z от оси y .

$$J_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 b dz = \frac{b}{3} z^3 \Big|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично $J_z = bh^3/12$.

Здесь, как и в любом профиле, более важную роль играет размер перпендикулярной оси, относительно которой определяется осевой момент инерции.

Осевой момент сопротивления $W_y = J_y / |z|_{\max} = bh^2/6$.

Осевой радиус инерции $i_y = \sqrt{J_y/A} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = h/\sqrt{12}$.

Сечение – круг диаметром d (рис. 17).

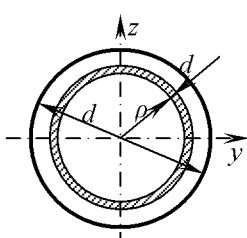


Рис. 17. К расчету геометрических характеристик круга

Площадь $A = \pi d^2 / 4$.

Статические моменты площади сечения относительно центральных осей z, y $S_y = S_z = 0$.

Центробежный момент инерции сечения относительно осей симметрии z, y $J_{yz} = 0$.

Определим полярный момент инерции сечения. Для этого выделим элементарную площадку в виде концентрического кольца радиусом ρ и толщиной $d\rho$.

$$J_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi \rho d\rho = \frac{2\pi}{4} \rho^4 \Big|_0^{d/2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Так как все центральные оси круга – это оси симметрии, то

$$J_y = J_z = J_0/2 = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Оевые и полярный моменты сопротивления

$$W_y = W_z = J_y / |z|_{\max} = \pi d^3 / 32, \quad W_0 = J_0 / |\rho|_{\max} = \pi d^3 / 16.$$

Сложные (составные) фигуры

Вычисление геометрических характеристик сложных (составных) фигур ведется путем разбиения их на простые фигуры, для которых используются известные (табличные) выражения геометрических характеристик. При этом встает задача пересчета геометрических характеристик фигур, вычисленных относительно одной системы осей к другой системе осей, которая может быть параллельна исходной или повернута относительно исходной.

Моменты инерции для параллельных осей (рис. 18, а)

Дано: осевые и центробежный моменты инерции для осей y, z . Найти: такие же моменты инерции для осей y_1, z_1 .

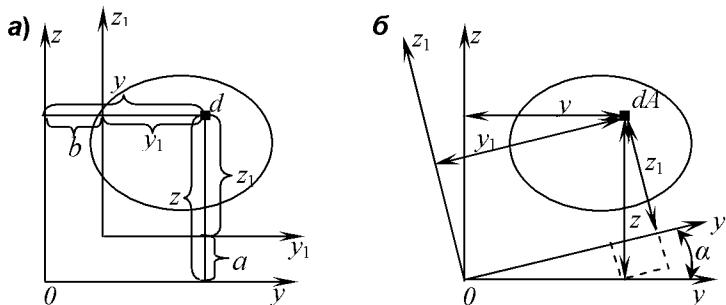


Рис. 18. Преобразование систем осей координат:
а – параллельный перенос; б – поворот

При параллельном переносе осей координаты точек связаны соотношением (рис. 18, а) $y_1 = y - b; z_1 = z - a$.

Осевой момент инерции относительно оси y_1

$$J_{y1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z - a)^2 dA = \int_A z^2 dA - 2a \int_A z dA + a^2 \int_A dA = \\ = J_y - 2aS_y + a^2 A.$$

Таким же способом получаем $J_{z1} = J_z - 2bS_z + b^2 A$;

$$J_{y1z1} = J_{yz} - bS_y - aS_z + abA.$$

Чаще используют вариант этих формул, когда исходные оси y_0, z_0 – центральные. Относительно этих осей статические моменты площади сечения S_y, S_z равны нулю.

$$J_{y1} = J_{y0} + a_0^2 A; \quad J_{z1} = J_{z0} + b_0^2 A; \quad J_{y1z1} = J_{y0z0} + a_0 b_0 A.$$

Из формул следует: в семействе параллельных осей относительно центральных осей осевые моменты инерции имеют наименьшее значение.

Моменты инерции при повороте осей (рис. 18,б)

Дано: осевые и центробежный моменты инерции для осей y, z . Найти: такие же моменты инерции для осей y_1, z_1 .

При повороте осей координаты точек связаны соотношением (рис. 18,б) $z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha; \quad y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha$.

Осевой момент инерции

$$J_{y1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dA = \\ = \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A yz dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA = \\ = J_{y1} = J_y \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha, \quad \text{или}$$

$$J_{y1} = \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha.$$

Таким же способом получаем

$$J_{z1} = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha, \quad \text{или}$$

$$J_{z1} = \frac{J_y + J_z}{2} - \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha + J_{yz} \sin 2\alpha;$$

$$J_{y1z1} = J_{yz} \cos 2\alpha + \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha.$$

При этом $J_{y1} + J_{z1} = J_y + J_z = J_0 = \text{const}(\alpha)$.

Период изменения моментов инерции при повороте системы координат: $180^\circ = \pi$ (рис. 19). Здесь штриховым линиям соответствуют главные оси инерции.

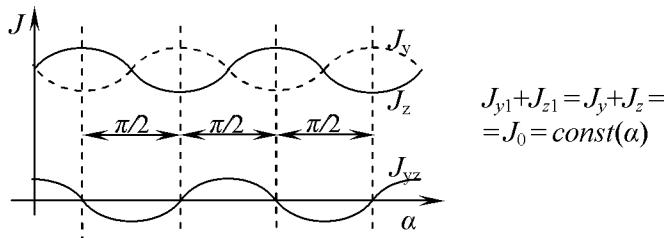


Рис. 19. Изменение моментов инерции при повороте осей системы координат

Полученные формулы по структуре подобны формулам для плоского напряженного состояния. Аналогом нормальных напряжений являются осевые моменты инерции, а касательных напряжений – центробежный момент инерции. При анализе на экстремум для главных осей инерции главные моменты инерции вычисляются аналогично:

$$J_{\text{el}} = J_{\text{extr}} = \frac{J_z + J_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{yz}^2} .$$

Главные центральные оси инерции сечения

При выводе формулы нормальных напряжений в поперечном сечении было введено понятие о системе главных центральных осей инерции (ГЦОИ), то есть осей одновременно центральных и главных. Свойства этих осей были указаны.

$$\begin{aligned} \text{Центральные оси: } & S_y = 0, \quad S_z = 0, \\ & J_y = \min, \quad J_z = \min. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Главные оси: } & J_{yz} = 0, \\ & J_y = \text{extr}, \quad J_z = \text{extr}. \end{aligned}$$

Видно, что осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции имеют дважды экстремальное значение (при параллельном переносе и повороте).

Знание положения главных центральных осей инерции важно при расчете на изгиб. Как доказано, частным случаем этих осей являются оси симметрии. Однако если сечение имеет более двух осей симметрии, то все центральные оси будут главными. При этом синусоиды на рис. 18 вырождаются в прямые

$J_{yz}(\alpha) \equiv 0$; $J_y(\alpha) \equiv J_z(\alpha) = const$. К таким сечениям относятся круг, все правильные выпуклые фигуры (правильный треугольник, квадрат и т.д.) и правильные звезды.

Пример 3.

Определить геометрические характеристики поперечного сечения стальной сварной двутавровой балки (рис. 20) с размерами: $h_{ct} = 400$ мм; $t_{ct} = 8$ мм; $b = 360$ мм; $t_{pol} = 18$ мм (сварные швы не учитывать).

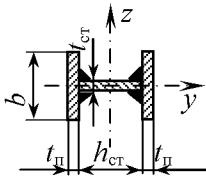


Рис. 20. Сварное двутавровое поперечное сечение

(второе слагаемое мало по сравнению с первым).

$$J_z = t_{ct} h_{ct}^3 / 12 + 2b t_{pol}^3 / 12 + 2b t_{pol} [(h_{ct} + t_{pol})/2]^2 = \\ = 0,8 \cdot 40^3 / 12 + 2 \cdot 36 \cdot 1,8^3 / 12 + 2 \cdot 36 \cdot 1,8 \cdot [(40+1,8)/2]^2 \approx 60800 \text{ см}^4$$

(второе слагаемое мало по сравнению с первым и третьим).

Осевые моменты сопротивления сечения:

$$W_y = J_y / |z|_{max} = 14000 / 18 \approx 777,6 \text{ см}^3;$$

$$W_z = J_z / |y|_{max} = 60800 / (20+1,8) \approx 279 \text{ см}^3.$$

Осевые радиусы инерции:

$$i_y = \sqrt{J_y / A} = \sqrt{14000 / 161,6} \approx 9,3 \text{ см.}$$

$$i_z = \sqrt{J_z / A} = \sqrt{60800 / 161,6} \approx 19,4 \text{ см.}$$

6. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

Прямой чистый изгиб

В поперечном сечении действует только один изгибающий момент (рис. 21). Пусть $M_y \neq 0$, $M_z = 0$. Этот вид деформации получается при нагружении консольной балки парой сил, а также в средней части вагонной оси.

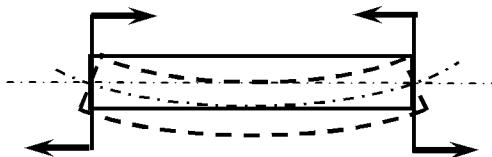


Рис. 21. Прямой чистый изгиб

Нормальные напряжения в поперечном сечении в общем случае нагружения определяются по формуле

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y.$$

Из нее следует

$$\boxed{\sigma = \frac{M_y(x)}{J_y} z.}$$

Формула записана в прямоугольной (декартовой) системе координат, в системе главных центральных осей инерции сечения. Частным случаем этих осей являются оси симметрии. Распределение нормальных напряжений не зависит от конфигурации сечения, и объемная эпюра представляет собой плоскость (рис. 22). На оси y нормальные напряжения равны нулю $\sigma(z=0)=0$ и удлинения равны нулю $\varepsilon(z=0)=0$ – это нейтральная линия, которая разделяет зоны растяжения и сжатия балки.

Максимальные нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных от нейтральной линии точках сечения (опасных точках):

$$\sigma_{\max} = \sigma(z_{\max}) = \frac{M_y(x)}{J_y} z_{\max}.$$

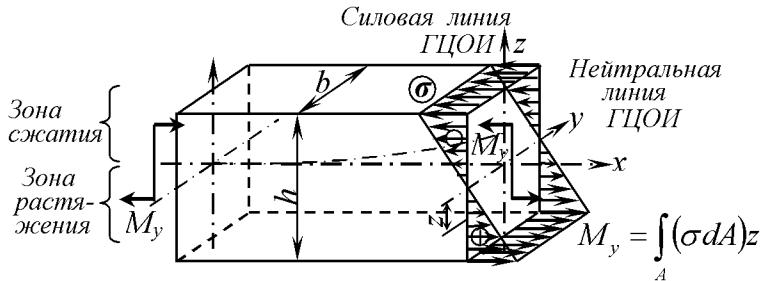


Рис. 22. Эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении при прямом (чистом) изгибе

По этим напряжениям записываем условие прочности при прямом изгибе.

В симметричных относительно оси y сечениях $|z_{\max}| = |z_{\min}|$.

Тогда условие прочности при прямом изгибе получает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y \max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

Здесь $W_y = J_y / |z_{\max}|$ – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки относительно нейтральной линии (J_y – осевой момент инерции).

Запись условия прочности при прямом изгибе зависит от вида материала.

Пластичные материалы

Для пластичных материалов опасным состоянием является текучесть и опасным напряжением – предел текучести. Эти материалы имеют равные пределы текучести при растяжении и сжатии и соответственно равные допускаемые напряжения. Условие прочности для пластичных материалов при прямом изгибе получает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y \max}}{W_y} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]}.$$

Исходя из условия экономии материала оптимальной формой поперечного сечения балки является форма, симметричная относительно нейтральной линии, и для которой момент сопротивления сечения относительно нейтральной линии максимален при минимальной площади сечения (рис. 23). В таком сечении

около нейтральной линии имеется минимум материала. Это профиль типа двутавра (рис. 23,д), швеллера (рис. 23,е) и их комбинации с обязательной ориентацией нагрузки вдоль стенки профилей. Ориентация нагрузки параллельно полкам профилей (рис. 23,ж) нецелесообразна вследствие резкого снижения осевого момента сопротивления сечения и соответственно прочности и увеличения податливости. Круглое сечение (рис. 23,г) не экономично.

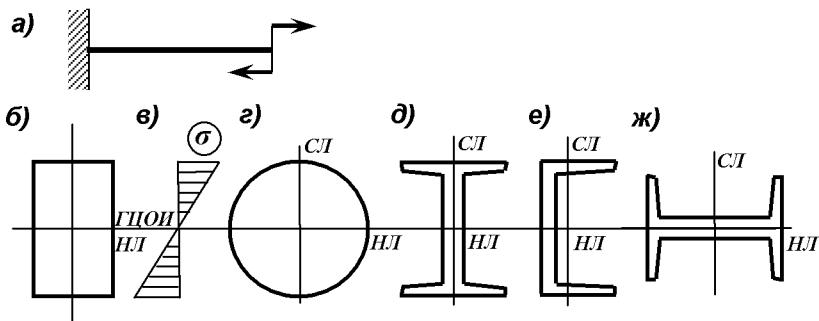


Рис. 23. Виды поперечных сечений для пластичных материалов при прямом (чистом) изгибе

Хрупкие материалы

Для хрупких материалов опасным состоянием является появление трещин и опасным напряжением является предел прочности (временное сопротивление) σ_v , который при сжатии имеет большее значение, чем при растяжении. Поэтому для хрупких материалов условие прочности записывается отдельно для зон растяжения и сжатия:

$$\sigma_{\max \text{раст}} = \left(\frac{M_y(x)}{J_y} z_{\max \text{раст}} \right)_{\max} \leq [\sigma]_{\text{раст}} = \frac{\sigma_{v \text{раст}}}{[n]},$$

$$\sigma_{\max \text{сж}} = \left(\frac{M_y(x)}{J_y} z_{\max \text{сж}} \right)_{\max} \leq [\sigma]_{\text{сж}} = \frac{\sigma_{v \text{сж}}}{[n]}.$$

Оптимальной формой поперечного сечения балки для хрупких материалов является форма, несимметричная относительно нейтральной линии, для которой

$$\frac{z_{\max \text{сж}}}{z_{\max \text{раст}}} = \frac{\sigma_{v \text{сж}}}{\sigma_{v \text{раст}}} = \frac{[\sigma]_{\text{сж}}}{[\sigma]_{\text{раст}}} = 3 \div 5$$

и для которой момент инерции сечения относительно нейтральной линии максимальен при минимальной площади сечения (рис. 24).

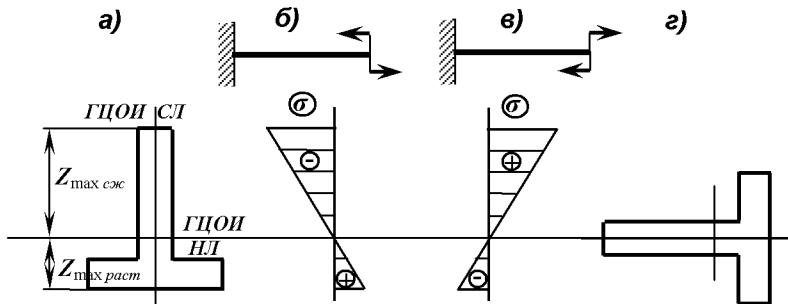


Рис. 24. Эпюры нормальных напряжений при прямом изгибе таврового профиля

Для хрупких материалов важен даже знак изгибающего момента; при сжатии верхних волокон (рис. 24,б) положение таврового профиля (рис. 24,а) экономично, а при сжатии нижних волокон (рис. 24,в) не экономично. Поэтому для них расчет на прочность надо делать для сечений с максимальными изгибающими моментами обоих знаков. При изгибе важно положение нагрузки относительно поперечного сечения (рис. 24,а, г), так как при этом учитываются разные осевые моменты инерции и сопротивления.

Прямой поперечный изгиб

При поперечном изгибе (рис. 25,а) в поперечном сечении дополнительно действует поперечная сила (рис. 25,б). Ей соответствуют касательные напряжения (рис. 25,в), которые связаны с деформациями сдвига. Они вызывают искривление (депланацию) поперечного сечения, то есть гипотеза плоских сечений, на которой основан вывод формулы нормальных напряжений в поперечном сечении, не выполняется. Однако касательные напряжения не вызывают изменения длины продольных волокон по сравнению с чистым изгибом, они только сдвигают их в продольном направлении, т.е. $2-2' = 3-3'$ (рис. 25,г).

Таким образом, формулы нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений, полученные для чистого изгиба, верны и для поперечного изгиба.

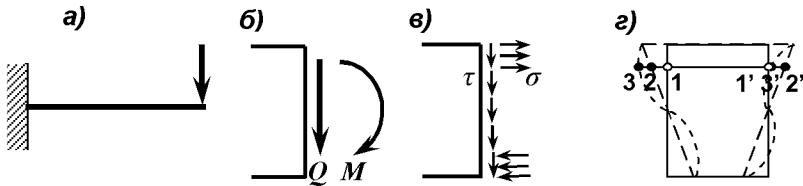


Рис. 25. Прямой поперечный изгиб:
а – схема нагружения; б – внутренние усилия; в – напряжения;
г – перемещения поперечного сечения (1 – сечение до нагружения;
2 – при чистом изгибе; 3 – при поперечном изгибе)

$$\sigma = \frac{M_y(x)}{J_y} z ; \quad \frac{d\theta_y}{dx} = \frac{M_y}{EJ_y} .$$

Формула касательных напряжений в поперечном сечении для поперечного изгиба получена Д.И. Журавским. Отметим только особенности их эпюры. Для прямоугольного поперечного сечения эпюра имеет вид параболы (квадратичной) с максимумом на нейтральной линии (где $\sigma(z=0)=0$) и нулем в крайних (от нейтральной линии) точках сечения, где $\sigma=\sigma_{\max}$, то есть максимумы нормальных и касательных напряжений не совпадают.

Сравним максимальные значения нормальных и касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения консольной балки (рис. 25, а), приняв, что

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y\max}}{W_y} , \quad \tau_{\max} \approx \tau_{cp} = \frac{Q}{A} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{M_{y\max}}{W_y} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{Fl}{(bh^2)/6} \cdot \frac{bh}{F} \rightarrow \frac{l}{h} .$$

Видно, что отношение σ_{\max} к τ_{\max} имеет порядок отношения длины балки к ее высоте, поэтому касательные напряжения при расчете на прочность балок обычно не учитывают.

Таким образом, и условия прочности, и оптимальные формы поперечного сечения для пластичных и хрупких материалов для поперечного изгиба такие же, как и для чистого изгиба.

Пример 4.

Подобрать из условия прочности поперечное сечение стальной балки (рис. 26) для указанных профилей (рис. 27). Силы $F_1 = 90$ кН, $F_2 = 80$ кН. Длина участков $a = 1$ м, $b = 0,5$ м. Допускаемое напряжение для стали $[\sigma] = 160$ МПа.

Определяем реакции в заделке.

В жестком защемлении при заданном нагружении возможны два реактивных усилия – сила R и пара сил M_R .

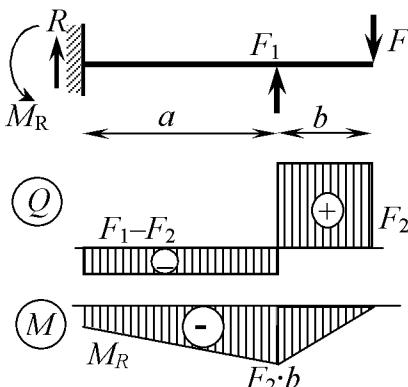


Рис. 26. Расчетная схема балки и эпюры поперечных сил Q_z и изгибающих моментов M_y

Левый участок, $0 \leq x \leq a$.
 левой части балки.)

$$Q = R = F_2 - F_1 = -10 \text{ kH.}$$

$$M = -M_R + Rx ; \quad M(x=0) = -M_R = -30 \text{ kHm},$$

$$M(x=a) = -M_R + Ra = -30 - 10 \cdot 1 = -40 \text{ kNm.}$$

Правый участок, $0 \leq x \leq b$. (Рассматривается равновесие правой части балки.)

$$O = F_2 = +80 \text{ kH.}$$

$$M = F_2 x; \quad M(x=0) = 0, \quad M(x=b) = -F_2 b = -40 \text{ kNm}.$$

Из эпюры изгибающих моментов M видно, что опасным является сечение под силой F_1 , где $M_{\max} = 40$ кНм.

Составляем уравнения равновесия (рис. 26):

$$\sum F_z = 0, \quad R + F_1 - F_2 = 0,$$

$$R = F_2 - F_1 = 80 - 90 = -10 \text{ kH};$$

$$\sum M_\alpha = 0 \,,$$

$$\underline{M}_B + F_1 a - F_2 (a+b) = 0 \,,$$

$$M_R = F_2(a+b) - F_1 a =$$

$$= 80 \cdot (1 + 0,5) + 90 \cdot 1 = 30 \text{ kHM}.$$

Определяем внутренние усилия – поперечные силы Q_z и изгибающие моменты M_y по участкам балки (рис. 26) методом сечений.

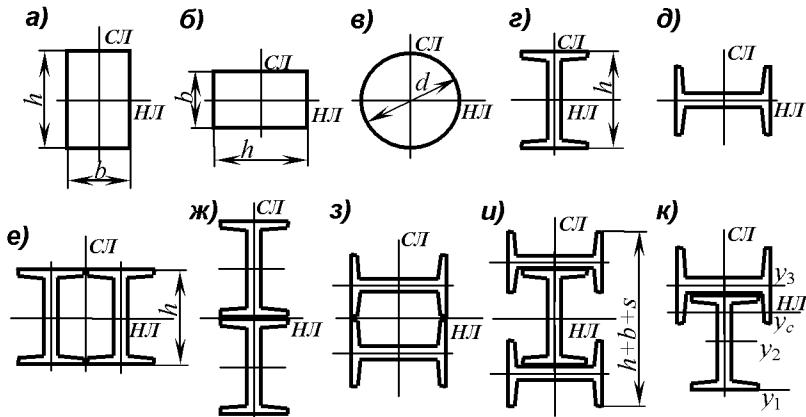


Рис. 27. Виды подбираемых профилей балки

Определяем из условия прочности требуемый осевой момент сопротивления поперечного сечения балки относительно нейтральной линии

$$W \geq M_{\max} / [\sigma] = 40 \cdot 10^6 / 160 = 25 \cdot 10^4 \text{ мм}^3 = 250 \text{ см}^3.$$

Этот момент сопротивления должен быть обеспечен независимо от формы профиля.

– Профиль *а* – прямоугольник (рис. 27, а). Сила действует по оси симметрии параллельно длинной стороне, нейтральная линия совпадает с другой осью симметрии. Размер *h* сильнее влияет на величину момента сопротивления и

$$W_y = J_y / |z|_{\max} = bh^2 / 6.$$

Примем, что $h = 2b$. Тогда $W_y = bh^2 / 6 = h^3 / 12$ и

$$h \geq \sqrt[3]{12W} = \sqrt[3]{12 \cdot 250} = 14,4 \text{ см}; \quad b = 7,2 \text{ см}.$$

Площадь сечения балки $A = h \times b = 14,4 \cdot 7,2 = 103,68 \text{ см}^2$ – определяет расход материала.

– Профиль *б* – прямоугольник (рис. 27, б). Сила действует по оси симметрии параллельно короткой стороне, нейтральная линия совпадает с другой осью симметрии. Размер *b* сильнее влияет на величину момента сопротивления и

$$W_y = J_y / |z|_{\max} = b^2h / 6.$$

Примем, что $h = 2b$. Тогда $W_y = b^2h / 6 = h^3 / 24$ и

$$h \geq \sqrt[3]{24W} = \sqrt[3]{24 \cdot 250} = 18,2 \text{ см}; \quad b = 9,1 \text{ см}.$$

Площадь сечения балки $A = h \times b = 18,2 \cdot 9,1 = 165,62 \text{ см}^2$ – расход материала больше предыдущего примерно на 60 %.

– Профиль ϑ – круг (рис. 27,в). Сила действует по оси симметрии, нейтральная линия перпендикулярна силовой линии.

$$W_y = J_y / |z|_{\max} = \pi d^3 / 32.$$

$$d \geq \sqrt[3]{32W/\pi} = \sqrt[3]{32 \cdot 250 / 3,14} \approx 13,6 \text{ см}.$$

$$\text{Площадь сечения балки } A = \pi d^2 / 4 = 3,14 \cdot 13,6^2 / 4 = 145,2 \text{ см}^2$$

– расход материала больше первого варианта примерно на 40 %, но меньше второго.

– Профиль ε – двутавр (рис. 27,г). Сила действует по оси симметрии вдоль стенки, нейтральная линия совпадает с другой осью симметрии.

Номер двутавра подбираем по справочным величинам из ГОСТ 8239–89 (Двутавры стальные горячекатаные). Момент сопротивления берем относительно оси x , с которой совпадает нейтральная линия.

Выбираем двутавр № 24 с $W_x = 289 \text{ см}^3 > 250$ с размерами $h = 240 \text{ мм}$, $b = 115 \text{ мм}$, площадь сечения балки $A = 34,8 \text{ см}^2$ – расход материала меньше первого варианта примерно в три раза (масса одного метра 27,3 кг).

– Профиль δ – двутавр (рис. 27,δ). Сила действует по оси симметрии параллельно полкам (поясам), нейтральная линия совпадает с другой осью симметрии.

Номер двутавра подбираем по справочным величинам из ГОСТ 8239–89. Момент сопротивления берем относительно оси y , с которой совпадает нейтральная линия.

Стандартный стальной горячекатанный двутавр для такого положения профиля подобрать нельзя, так как для наибольшего стандартного номера 60 $W_y = 182 \text{ см}^3 < 250$. Можно спроектировать сварной двутавр для требуемого осевого момента сопротивления.

– Профиль e – два одинаковых двутавра (рис. 27,е) рядом. (Для этого и следующих вариантов предполагается, что двутавры соединены (сваркой или иначе) так, что изгибаются как еди-

ное целое.) Сила действует по оси симметрии профиля параллельно стенкам, нейтральная линия совпадает с другой осью симметрии.

Осевой момент сопротивления поперечного сечения балки относительно нейтральной линии определится как

$$W_{y\Sigma} = J_{y\Sigma} / |z|_{\max \Sigma} = 2J_{xI} / |h_1/2| = 2W_{xI} .$$

Только для этого варианта полный осевой момент сопротивления поперечного сечения балки равен сумме осевых моментов сопротивления двутавров.

Номер двутавра подбираем по справочным величинам из ГОСТ 8239–89. Момент сопротивления берем относительно оси x , с которой совпадает нейтральная линия.

Выбираем двутавр № 18 с $W_{\Sigma y} = 2 \cdot 143 = 286 \text{ см}^3 > 250$ с размерами $h = 180 \text{ мм}$, $b = 90 \text{ мм}$, площадь сечения балки $A_{\Sigma} = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2$ – расход материала больше, чем в варианте “г”, примерно на треть.

– Профиль ж – два одинаковых двутавра (один над другим). Сила действует по оси симметрии профиля (рис. 27,ж) вдоль стенок, нейтральная линия совпадает с другой осью симметрии.

Осевой момент сопротивления поперечного сечения балки относительно нейтральной линии определится с использованием формулы моментов инерции для параллельных осей:

$$W_{y\Sigma} = J_{y\Sigma} / |z|_{\max \Sigma} = \frac{2[J_{xI} + A_I(h_1/2)^2]}{h_1} = W_{xI} + A_I h_1 / 2 .$$

Подбор номера двутавра ведется методом проб по ГОСТ 8239–89. Выбираем двутавр № 16 с $W_{xI} = 109 \text{ см}^3$ с размерами $h = 160 \text{ мм}$, $b = 81 \text{ мм}$, $A = 20,2 \text{ см}^2$. Для всего профиля осевой момент сопротивления $W_{y\Sigma} = 270,6 \text{ см}^3 > 250$, площадь сечения балки $A_{\Sigma} = 2 \cdot 20,2 = 40,4 \text{ см}^2$ – расход материала больше, чем в варианте “г”, примерно на 15 %.

– Профиль з – два одинаковых двутавра (один над другим). Сила действует по оси симметрии профиля (рис. 27,з) параллельно полкам (поясам), нейтральная линия совпадает с другой осью симметрии.

Осевой момент сопротивления поперечного сечения балки относительно нейтральной линии определится с использованием формулы моментов инерции для параллельных осей:

$$W_{y\Sigma} = J_{y\Sigma} / |z|_{\max \Sigma} = \frac{2 \left[J_{yI} + A_I (b_I/2)^2 \right]}{b_I} = W_{yI} + A_I b_I / 2.$$

Подбор номера двутавра ведется методом проб по ГОСТ 8239–89. Выбираем двутавр № 27 с $W_{yI}=41,5 \text{ см}^3$ с размерами $h=270 \text{ мм}$, $b=125 \text{ мм}$, $A=40,2 \text{ см}^2$. Для всего профиля осевой момент сопротивления $W_{y\Sigma}=292,7 \text{ см}^3 > 250$, площадь сечения балки $A_\Sigma=2 \cdot 40,2=80,4 \text{ см}^2$ – расход материала больше, чем в варианте “г”, примерно в 2,3 раза.

– *Профиль и* – три одинаковых двутавра (рис. 27,и). Сила действует по оси симметрии профиля вдоль стенки среднего двутавра и параллельно полкам нижнего и верхнего двутавров, нейтральная линия совпадает с другой осью симметрии.

Осевой момент сопротивления поперечного сечения балки относительно нейтральной линии определяется с использованием формулы моментов инерции для параллельных осей:

$$W_{y\Sigma} = J_{y\Sigma} / |z|_{\max \Sigma} = \frac{J_{xI} + 2 \left[J_{yI} + A_I (h_I/2 + s/2_I)^2 \right]}{(h_I/2 + s_I/2 + b_I/2)}.$$

Подбор номера двутавра ведется методом проб по ГОСТ 8239–89. Выбираем двутавр № 16 с $J_{xI}=873 \text{ см}^4$, $J_{yI}=58,6 \text{ см}^4$ с размерами $h=160 \text{ мм}$, $b=81 \text{ мм}$, $s=5,0 \text{ мм}$, $A=20,2 \text{ см}^2$. Для всего профиля осевой момент сопротивления $W_{y\Sigma}=293,3 \text{ см}^3 > 250$, площадь сечения балки $A_\Sigma=3 \cdot 20,2=60,6 \text{ см}^2$ – расход материала больше, чем в варианте “г”, примерно в 1,7 раза и больше, чем в варианте “ж”, в 1,5 раза.

– *Профиль к* – два одинаковых двутавра (один над другим). Сила действует по оси симметрии профиля (рис. 27,к) вдоль стенки нижнего двутавра (1) и параллельно полкам верхнего двутавра (2), нейтральная линия перпендикулярна силовой линии – оси симметрии – и проходит через центр площади всего профиля.

Расчет начинается с определения положения центра площади всего профиля. Для этого задаемся какой-то исходной осью y , такой, чтобы расчет был проще, например y_1 (рис. 27,к).

$$z_{c\Sigma} = \sum_i z_{ci} \cdot A_i / \sum_i A_i = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_1}{2A_1} = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

где $z_1=h/2$, $z_2=h+s/2$, $z_{c\Sigma}=(3h+s)/4$.

Осевой момент сопротивления поперечного сечения балки относительно нейтральной линии определится с использованием формулы моментов инерции для параллельных осей:

$$W_{y\Sigma} = J_{y\Sigma} / |z|_{\max \Sigma} = \frac{|J_{xI} + A_I(z_1 - z_{c\Sigma})^2| + |J_{yI} + A_I(z_2 - z_{c\Sigma})^2|}{|z|_{\max \Sigma}}.$$

Здесь $z_{c\Sigma} - z_1 = z_2 - z_{c\Sigma} = (z_2 - z_1)/2 = (h + s)/4$, то есть центр площади (массы) всего профиля расположен посередине между центрами площадей двутавров. Из рис. 27,к видно, что

$$z_{\max \Sigma} = z_{c\Sigma} = (3h + s)/4.$$

Подбор номера двутавра ведется методом проб по ГОСТ 8239–89. Выбираем двутавр № 22 с $J_{xI} = 2550 \text{ см}^4$, $J_{yI} = 157 \text{ см}^4$ и размерами $h = 220 \text{ мм}$, $b = 110 \text{ мм}$, $s = 5,4 \text{ мм}$, $A = 30,6 \text{ см}^2$. Для всего профиля осевой момент сопротивления $W_{y\Sigma} = 281,7 \text{ см}^3 > 250$, площадь сечения балки $A_{\Sigma} = 2 \cdot 30,6 = 61,2 \text{ см}^2$ – расход материала больше, чем в варианте “г”, примерно в 1,8 раза.

7. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Как отмечалось, в общем случае изгиба (при поперечном изгибе) в поперечных сечениях балки возникают изгибающие моменты и поперечные силы. Наличие изгибающего момента связано с возникновением в поперечных сечениях балки нормальных напряжений. Наличие поперечной силы связано с возникновением в поперечных сечениях балки касательных напряжений, а по закону парности касательных напряжений – и в ее продольных сечениях.

В отличие от нормальных напряжений распределение касательных напряжений зависит от формы поперечного сечения балки.

Сечение прямоугольное

Для определения касательных напряжений рассмотрим вначале балку небольшой ширины (рис. 25,а), из которой вырежем элементарный участок длиной dx .

На этот элемент действуют следующие усилия (рис. 28,а): в левом поперечном сечении Q_z и M_y и в правом Q_z и $M_y + dM_y$.

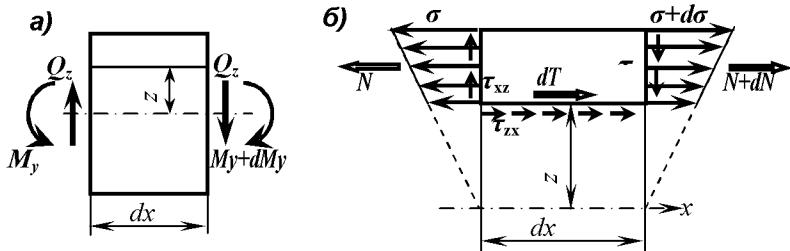


Рис. 28. Усилия и напряжения, действующие на элемент бруса при поперечном изгибе

Примем, что нормальные напряжения от изгибающих моментов определяются по формуле для чистого изгиба, так как для балок с высотой сечения $h < l/4$ ее погрешность невелика:

$$\sigma = \frac{M_y(x)}{J_y} z.$$

Непосредственное определение касательных напряжений в поперечном сечении τ_{xz} затруднительно, поэтому находим равные им (вследствие закона парности) касательные напряжения τ_{zx} , возникающие в продольном сечении, параллельном нейтральному слою. Эти напряжения характеризуют интенсивность взаимодействия продольных слоев балки, стремящихся сдвинуться относительно друг друга в продольном направлении.

Для этого отсекаем продольным сечением, отстоящим от нейтрального слоя на расстоянии z , верхнюю часть элемента, заменяя действие отброшенной нижней части касательными напряжениями τ (индекс xy в дальнейшем опускаем), равнодействующая которых $dT = \tau b dx$ показана на рис. 28,б.

Здесь принято, что касательные напряжения равномерно распределены по ширине поперечного сечения (гипотеза Журавского). Это предположение выполняется тем точнее, чем уже поперечное сечение стержня.

Нормальные напряжения σ и $\sigma + d\sigma$, действующие на торцевых гранях элемента площадью ω , заменим равнодействующими:

$$N_\omega = \int_\omega \sigma dA = \int_\omega \frac{M_y}{J_y} z dA = \frac{M_y}{J_y} S_y^\omega \quad \text{и}$$

$$N_{\omega} + dN_{\omega} = \int_{\omega} (\sigma + d\sigma) dA = \frac{(M_y + dM_y)}{J_y} S_y^{\omega}.$$

Здесь S_y^{ω} – статический момент отсеченной части поперечного сечения площадью ω относительно оси y (нейтральной линии), $S_y^{\omega} = \int_{\omega} z dA$.

Составим уравнение равновесия отсеченного элемента балки. Спроектируем силы, действующие на элемент, на продольную ось. Очевидно, что касательные усилия, действующие в поперечных сечениях, в указанное уравнение не войдут.

$$\sum_x F = 0; \quad N_{\omega} + dT - (N_{\omega} + dN_{\omega}) = 0 \rightarrow dT = dN_{\omega} = \frac{dM_y}{J_y} S_y^{\omega}.$$

С учетом связи изгибающего момента и поперечной силы $dM_y/dx = Q_z$

$$\frac{dT}{dx} = T_0 = \frac{Q_z}{J_y} S_y^{\omega}.$$

Здесь T_0 – удельная (на единицу длины) сдвигающая сила в продольном сечении балки, параллельном нейтральному слою (используется при расчете составных балок).

С учетом гипотезы Журавского $\tau(y) = const$ получим

$$\boxed{\tau = \frac{Q_z S_y^{\omega}}{J_y b}}.$$

Эта зависимость впервые была установлена Д.И. Журавским.

В этой формуле b – ширина сечения в том месте, где определяются касательные напряжения, а статический момент, подставляемый в эту формулу, может быть вычислен как для верхней, так и для нижней части (статические моменты этих частей сечения относительно его центральной оси Ox отличаются только знаком, так как статический момент всего сечения равен нулю).

Построим эпюру касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения балки (рис. 29).

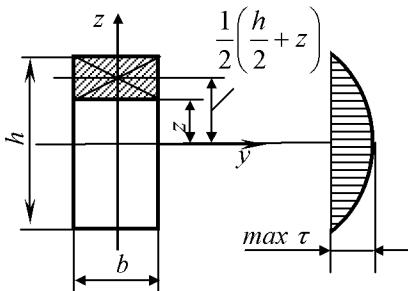


Рис. 29. Эпюра касательных напряжений для прямоугольного сечения

Для этого сечения $J_y = bh^3/12$, $A = bh$,

$$S_y^\omega = \omega z_c^\omega = b\left(\frac{h}{2} - z\right) \left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right) \right] = \frac{bh^2}{8} \left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right);$$

$$\tau = \frac{Q_z S_y^\omega}{J_y b} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{A} \left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right).$$

Как видно из формулы, касательные напряжения по высоте сечения меняются по закону квадратной параболы, достигая максимума на нейтральной линии:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{A},$$

т. е. τ_{\max} в 1,5 раза больше того напряжения, которое получилось бы при равномерном распределении касательных напряжений по сечению.

Наличие касательных напряжений при поперечном изгибе требует проведения проверки прочности по этим напряжениям для балок, изготовленных из материалов, плохо сопротивляющихся сдвигу, например дерево вдоль волокон.

Сечение произвольной формы

В таких сечениях распределение касательных напряжений определяется теми же правилами (рис. 30), что при кручении некруглых сечений:

– В точках вблизи контура (рис. 30, а) касательные напряжения направлены по касательной к контуру сечения. (Доказательство от противного: предположим, что напряжение τ направлено

под углом к контуру сечения. Тогда его можно разложить на две составляющие: по нормали к контуру τ_n и по касательной τ_t . Однако по условиям нагружения поверхность стержня свободна от напряжений, и поэтому, по закону парности, τ_n должно быть равно нулю.)

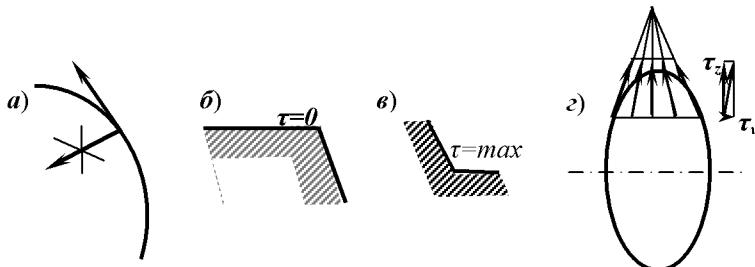


Рис. 30. Особенности распределения касательных напряжений при изгибе

- Во внешних (выступающих) углах (рис. 30,б) касательные напряжения равны нулю (если дважды применить предыдущее доказательство).
- Во внутренних (входящих) углах (рис. 30,в) имеется концентрация касательных напряжений.
- В точках, лежащих на одном уровне (на линии, параллельной нейтральной), касательные напряжения имеют общую точку схода (рис. 30,г).

Следовательно, в точках сечения произвольной формы касательные напряжения в общем не параллельны поперечной силе. Касательные напряжения, найденные по формуле Журавского, представляют собой лишь его вертикальную составляющую (параллельную поперечной силе).

Анализ точных решений теории упругости показывает, что в большинстве случаев горизонтальные составляющие касательных напряжений невелики.

В таких сечениях τ_{\max} не обязательно будет на нейтральной линии.

Тонкостенные балки

Тонкостенные профили являются оптимальной формой поперечного сечения балки при чистом изгибе, когда действует только изгибающий момент.

Построим эпюру касательных напряжений τ для балки двутаврового сечения (рис. 31). В стенке, имеющей малую толщину, напряжения по высоте сечения меняются, как в прямоугольном сечении по закону квадратной параболы, достигая максимума на нейтральной линии (рис. 31,б).

$$\tau(z) = \frac{Q_z S_{y,cm}^{\omega}}{J_y s},$$

где $S_{y,cm}^{\omega} = \sum \omega z_c^{\omega} \approx bt(h-t)/2 + s\left(\frac{h}{2}-t-z\right)\left(\frac{h}{2}-t+z\right)/2$.

Для расчета максимального касательного напряжения следует брать статический момент половины сечения (полусечения), значения которого приведены в стандарте двутавров.

Касательные напряжения в стенке при переходе к полке

$$\tau_{cm} = \frac{Q_z bt}{J_y s 2}(h-t).$$

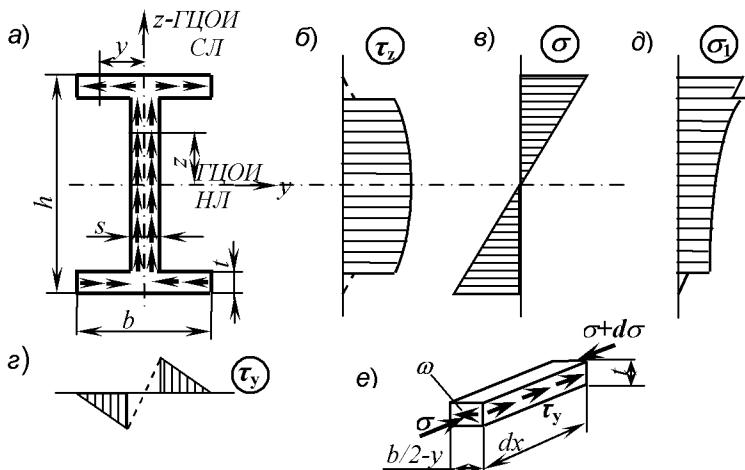


Рис. 31. Напряжения при изгибе балки двутаврового сечения:
а – направление касательных напряжений; б – эпюра касательных напряжений, параллельных поперечной силе; в – эпюра нормальных напряжений; г – эпюра касательных напряжений в полке, перпендикулярных поперечной силе; д – эпюра главных напряжений; е – элементарный участок, вырезанный из полки

В полках двутавров касательные напряжения, параллельные поперечной силе, в крайних точках от нейтральной линии равны нулю. В других точках полок они могут быть определены только приближенно, так как гипотеза о равномерности распределения касательных напряжений по ширине сечения здесь не применима. Их средние значения меньше по сравнению с напряжениями в стенке примерно во столько раз, во сколько ширина полки больше толщины стенки (b/s).

В некоторых случаях, например для сварных балок, приходится учитывать касательные напряжения и силы в полках двутавров, параллельные нейтральной линии. Их определение (рис. 31,е) ведется так же, как для напряжений, параллельных поперечной силе. Получается та же формула Журавского:

$$\tau_{yn}(y) = \frac{Q_z S_{yn}^\omega}{J_y t}, \text{ где } S_{yn}^\omega \approx t \left(\frac{b}{2} - y \right) \left(\frac{h-t}{2} \right).$$

Из формулы для S_{yn}^ω видно, что напряжения меняются по линейному закону (рис. 31,г), и в крайних от силовой линии точках полок $\tau_{yn}(y = \pm b/2) = 0$. В разных половинах полок касательные напряжения направлены встречно (рис. 31,а). При обходе контура сечения их направление сохраняется (по или против часовой стрелки).

Из анализа эпюры σ и τ для двутавра следует, что поперечная сила в основном воспринимается стенкой, а изгибающий момент – полками.

Пример 5

Вычислить максимальные касательные напряжения, действующие в балке (пример 4), в профилях a и g (рис. 27,а, г).

Допускаемые касательные напряжения для стали $[\tau] \approx 0,6 \cdot 160 = 96$ МПа.

Максимальное значение поперечной силы $Q_{z \max} = 80$ кН действует на правом участке.

– Профиль a – прямоугольник (рис. 27,а). Сила действует по оси симметрии параллельно длинной стороне. Площадь сечения $A = h \times b = 14,4 \cdot 7,2 = 103,68 \text{ см}^2$.

Касательные напряжения по высоте сечения меняются по закону квадратной параболы, достигая максимума на нейтральной линии:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{A} = \frac{3 \cdot 80 \cdot 10^3}{2 \cdot 16562} = 7,24 \text{ МПа} << [\tau] = 96.$$

– Профиль *г – двутавр* (рис. 27,г). Сила действует по оси симметрии вдоль стенки, нейтральная линия совпадает с другой осью симметрии (в стандарте – ось *x*).

Выбран по ГОСТ 8239–89 двутавр № 24 высотой *h* = 240 мм, с толщиной стенки *s* = 5,6 мм, моментом инерции относительно оси *x* (нейтральной линии) *J_{xi}* = 3460 см⁴, статическим моментом полусечения *S_{xi}* = 163 см³.

$$\tau_{\max} = \frac{Q_z S_y^\omega}{J_y b} = \frac{Q_z S_{xi}^\omega}{J_{xi} s_i} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^3}{3460 \cdot 10^4 \cdot 5,6} = 67,3 \text{ МПа} < [\tau] = 96.$$

Построим эпюру касательных напряжений τ для швеллерной балки (рис. 32). Пусть нагрузка расположена в вертикальной главной плоскости, не являющейся плоскостью симметрии сечения. Швеллер можно рассматривать как половину двутавра, поэтому общий характер эпюр касательных напряжений сохранится.

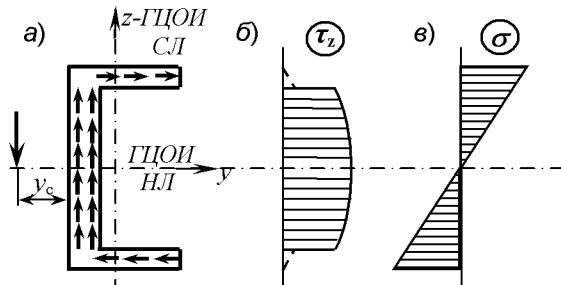


Рис. 32. Напряжения при изгибе швеллера:
а – направление касательных напряжений; б – эпюра касательных напряжений, параллельных поперечной силе;
в – эпюра нормальных напряжений

При обходе контура швеллера направление касательных напряжений сохраняется (по или против часовой стрелки), и их равнодействующая образует внутренний крутящий момент. Таким образом, изгиб стержня сопровождается кручением. При стесненном кручении нормальные напряжения в сечении будут распределяться по более сложному закону, чем при плоском изгибе.

Для того чтобы получить плоский изгиб с нейтральной осью y , вертикальная плоскость, в которой действует сила, должна проходить через некоторую точку O (рис. 32,а), называемую центром изгиба (иногда применяют и другие названия: центр кручения, центр жесткости, центр скальвания). Ее положение зависит от формы сечения. Теория расчета тонкостенных стержней на изгиб с кручением разработана В.З. Власовым.

8. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ ПРЯМОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Как показано, в общем случае изгиба (при поперечном изгибе) в поперечных сечениях балки возникают изгибающие моменты, с которыми связаны нормальные напряжения, и поперечные силы, с которыми связаны касательные напряжения. В этом случае для оценки прочности балки надо исследовать ее напряженное состояние. Для полного описания напряженного состояния необходимо и достаточно знать все компоненты напряженного состояния в трех взаимно перпендикулярных площадках.

Рассмотрим сначала балку прямоугольного поперечного сечения (рис. 33,а). Вырежем из нее около произвольной точки бесконечно малый элемент в виде куба (рис. 33,б), который получается при проведении трех пар (взаимно перпендикулярных и попарно параллельных) сечений. Одна пара площадок – поперечные сечения (плоскость yz), другая пара площадок – продольные сечения (плоскость xz), параллельные силовой плоскости, третья пара площадок – продольные сечения (плоскость xy), параллельные нейтральному слою.

При определении нормальных напряжений от изгибающего момента (рис. 33,г)

$$\sigma = \frac{M_y(x)}{J_y} z$$

принимали, что имеем линейное напряженное состояние, то есть действует только нормальное напряжение в поперечном сечении.

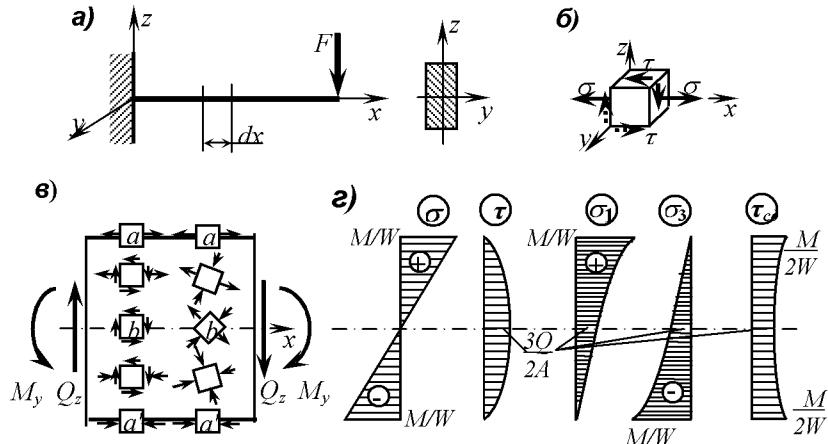


Рис. 33. Напряженное состояние при прямом поперечном изгибе:
а – схема нагружения; б – бесконечно малый элемент; в – напряжения в поперечном и продольном сечениях и в главных площадках; г – эпюры нормальных и касательных напряжений, первого и третьего главных напряжений, экстремальных касательных напряжений

Ранее (см. рис. 28), при определении касательных напряжений от поперечной силы

$$\tau = \frac{Q_z S_y^\omega}{J_y b},$$

показано, что они действуют (рис. 33,г) в поперечном сечении (yz) параллельно поперечной силе и в продольном сечении, параллельном нейтральному слою (xy), параллельно силовой плоскости (xz).

В продольном сечении, параллельном силовой плоскости (xz), напряжения отсутствуют. Это главная площадка, так как $\tau = 0$. А так как $\sigma_y = 0$, то имеем упрощенное плоское напряженное состояние. Напряженное состояние в разных точках балки показано на рис. 33,в (первый столбец).

Для оценки прочности балки определим главные напряжения, используя формулу плоского напряженного состояния:

$$\sigma_{\text{en}} = \sigma_{\text{extr}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}.$$

Здесь $\sigma_x = \sigma = \frac{M_y(x)}{J_y} z, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau = \frac{Q_z S_y^\omega}{J_y b}.$

Тогда $\sigma_{\text{en}} = \frac{\sigma}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$

С учетом обозначений главных напряжений имеем

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} > 0; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < 0; \quad \sigma_2 = 0.$$

Из формул видно, что σ_1 – всегда растягивающее напряжение, а σ_3 – сжимающее (второе слагаемое, с корнем, больше первого). Их эпюры показаны на рис. 33,г.

Положение главных площадок, перпендикулярных второй главной, в которых $\tau = 0$, определится как

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\sigma = -2\tau / (\sigma_x - \sigma_y) = -2\tau / \sigma.$$

Положение главных площадок в разных точках балки показаны на рис. 33,в (второй столбец).

В площадках, наклоненных под углом 45° к этим главным, и называемых площадками сдвига, действуют экстремальные касательные напряжения, которые определяются по формуле для плоского напряженного состояния:

$$\tau_{\text{co}} = \tau_{\text{extr}} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2},$$

а для поперечного изгиба (рис. 33,г)

$$\tau_{\text{co}} = \tau_{\text{extr}} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Рассмотрим характерные точки.

Точки, наиболее удаленные от нейтральной линии (элементы a, a'). В них касательные напряжения равны нулю, а действуют максимальные нормальные напряжения $\sigma_{\max} = M_y/W_y$.

Здесь имеем линейное напряженное состояние и главная площадка (первая в зоне растяжения и третья в зоне сжатия) совпадает с поперечным сечением. В площадках сдвига $\tau_{\text{co}} = \sigma_{\max}/2$. Условие прочности записывают, как при чистом изгибе, в виде $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$.

Точки, расположенные в нейтральной линии (элемент b). В них нормальное напряжение равно нулю, а действуют максимальные касательные напряжения $\tau = 1,5Q/A$. Здесь имеем напряженное состояние чистого сдвига с экстремальными касательными напряжениями $\tau_{extr} = \pm\tau = \pm 1,5Q/A$. Главные площадки наклонены под углом 45° к продольной оси с главными напряжениями (σ_1, σ_3) $\sigma_{\text{gl}} = \mp\tau = \pm 1,5Q/A$. Условие прочности записывают, как при срезе, по касательным напряжениям: $\tau_{\max} \leq [\tau]$.

Как уже было отмечено, прочность балок зависит от вида материала (пластичный или хрупкий), формы поперечного сечения и его положения относительно нагружки. В подавляющем большинстве случаев расчет балок на прочность ведется по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим от изгибающего момента в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии, по формуле $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$.

В некоторых случаях, в частности для тонкостенных профилей, этого недостаточно и надо дополнительно проводить расчет балок на прочность по главным напряжениям с применением соответствующих гипотез (теорий) прочности. Так, для швеллеров и двутавров опасными точками могут быть точки в месте перехода от стенки к полке (рис. 31, д).

По четвертой (энергетической) гипотезе прочности, используемой для пластичных материалов,

$$\sigma_{\text{экв}}^{(4)} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Подставляя выражения для главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в балке, получим

$$\sigma_{\text{экв}}^{(4)} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma], \text{ где } \sigma = \sigma(M_y) \text{ и } \tau = \tau(Q_z).$$

Для пластичных материалов используется также третья (наибольших касательных напряжений) гипотеза прочности, по которой

$$\sigma_{\text{экв}}^{(3)} = \sigma_1 - \sigma_3; \quad \sigma_{\text{экв}}^{(3)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

9. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ОСИ БАЛКИ

При изгибе происходит искривление первоначально прямой продольной оси бруса (стержня) или изменение ее кривизны.

При выводе формул нормальных напряжений в поперечном сечении при изгибе было получено выражение, связывающее внутренние усилия и деформации элемента длиной dx :

$$\frac{d\theta_y}{dx} = \frac{M_y}{EJ_y}.$$

Здесь $d\theta_y$ – приращение угла поворота сечения вокруг оси y ; M_y – изгибающий момент; E – модуль продольной упругости (Юнга); J_y – осевой момент инерции сечения относительно оси y ; EJ_y – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

Рассмотрим перемещения при изгибе на примере консольной балки (рис. 34).

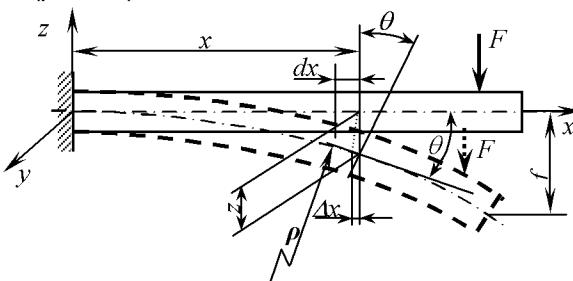


Рис. 34. Перемещения при изгибе

Введем систему координат: ось x – продольная, оси y, z – главные центральные оси инерции (ГЦОИ) поперечных сечений, ось z – силовая линия, вдоль неё действует сила F (и поперечные силы Q), ось y – нейтральная линия, где продольные деформации (удлинения) и нормальные напряжения равны нулю.

При изгибе все продольные волокна будут искривляться подобно продольной оси, меняя свою длину. Удобно описать перемещения балки через перемещения продольной оси, которая лежит в нейтральном слое и своей длины не меняет.

Каждое поперечное сечение балки получает при изгибе перемещения относительно исходной системы координат:

- перемещение центра масс сечения по нормали к недеформированной продольной оси балки – прогиб z ;
- перемещение центра масс сечения вдоль продольной оси балки – Δx ;
- поворот сечения вокруг поперечной оси y (нейтральной линии) – угол поворота θ .

В инженерных сооружениях обычно используются “жесткие” балки, у которых изогнутая продольная ось (упругая линия) является очень пологой кривой и у которых $\theta_{\max} \leq 1^\circ$ или $f/l \leq 1/1000$, где $f = z_{\max}$ – наибольший прогиб или “стрела” прогиба; l – длина балки или пролета. В “жестких” балках $\Delta x \ll f \ll l$, и принимают $\Delta x \approx 0$, то есть пренебрегают продольным перемещением центра масс сечений. Это позволяет значительно упростить расчет перемещений при изгибе.

Выделим из балки элемент длиной dx и рассмотрим его деформацию (рис. 34). Поперечные сечения повернутся вокруг оси y относительно друг друга на угол $d\theta$. Дуга изогнутой продольной оси элемента длиной dx определится как $dx = \rho \cdot d\theta$, где ρ – радиус кривизны продольной оси бруса ($1/\rho$ – кривизна изогнутой продольной оси балки).

В выделенном поперечном сечении проведем касательную к изогнутой продольной оси бруса. Рассматривая изогнутую продольную ось как математическую кривую и используя понятие производной, имеем $dz/dx = \tan \theta$.

В “жестких” балках углы поворота сечений малы, и можно принять $\tan \theta \approx \theta$ (рад). Объединяя формулы, получим выражение, связывающее перемещения в балке с её кривизной:

$$1/\rho(x) = d\theta(x)/dx \approx d^2z(x)/dx^2.$$

При расчете “гибких” балок (типа пружин) с большой кривизной продольной оси надо использовать более строгое выражение:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{d^2z}{dx^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Использование этой формулы для определения перемещений балок приводит к функциям Бесселя. При малых углах поворота $dz/dx = \operatorname{tg}\theta \approx \theta \ll 1(\text{rad})$ получим предыдущее выражение.

Подставляя выражение перемещений “жесткой” балки в формулу с внутренними усилиями, получим приближенное дифференциальное уравнение изогнутой продольной оси балки:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \frac{d\theta_y(x)}{dx} = \pm \frac{M_y(x)}{EJ_y(x)}.$$

Последовательное интегрирование этого уравнения приводит соответственно к уравнению углов поворота сечений $\theta(x) = z'(x)$:

$$\theta(x) = \frac{dz(x)}{dx} = \int \frac{M_y(x)}{EJ_y(x)} dx + C^*,$$

и уравнению прогибов $z(x)$:

$$z(x) = \int dx \int \frac{M_y(x)}{EJ_y(x)} dx + C^* x + D^*.$$

Эти три уравнения составляют алгоритм аналитического метода определения перемещений при изгибе.

С математической точки зрения определение перемещений – это решение краевой задачи. Здесь C^*, D^* – постоянные интегрирования, подбором которых из двойного семейства кривых (рис. 35) выбираем ту кривую, которая соответствует граничным условиям – условиям опирания балки. Для этого сначала выявляются условия опирания балки – такие сечения, где при нагружении нет перемещений (прогиба или угла поворота). Равенство нулю перемещений (кинематические граничные условия), то есть их запрещение, означает наложение на конструкцию связей с появлением соответствующих реактивных усилий (рис. 36). Так, в сечении жесткого защемления имеем равенство нулю угла поворота (с появлением реактивного момента) и равенство нулю прогиба (с появлением реактивной силы); на шарнирной опоре имеем равенство нулю прогиба (с появлением реактивной силы).

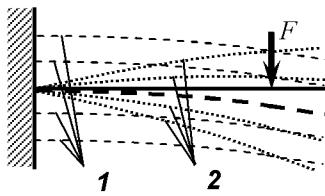


Рис. 35. Влияние постоянных интегрирования на положение изогнутой продольной оси балки:
1 – $D^* = \text{var}$, $C^* = \text{const} = 0$;
2 – $C^* = \text{var}$, $D^* = \text{const} = 0$

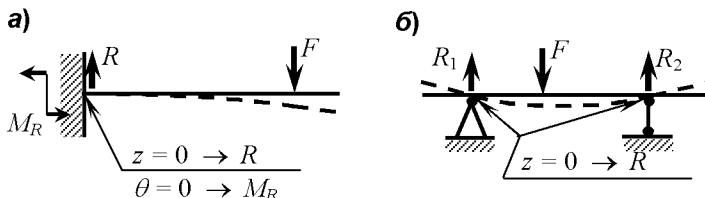


Рис. 36. Кинематические граничные условия при изгибе:
а – сечение жесткого защемления; б – шарнирные опоры

Определимся со знаком перемещений. Для изогнутой продольной оси балки на рис. 34 изгибающий момент и вторая производная от прогиба имеют один знак (минус), поэтому в дифференциальном уравнении оси балки надо оставить знак плюс. Тогда для правой системы координат (ось x вправо) прогиб *положителен*, если направлен вверх, а угол поворота *положителен*, если направлен против часовой стрелки (рис. 37).

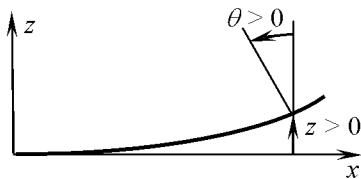


Рис. 37. Правила знаков для перемещений при изгибе

Пример 6

Определить перемещения в консольной балке ($EJ_y(x) = \text{const}$), нагруженной на свободном торце сосредоточенной силой F (рис. 38).

Применяя метод сечений, определим в произвольном сечении балки изгибающий момент M_y . Из условия равновесия левой части балки $M_y = -Fx$.

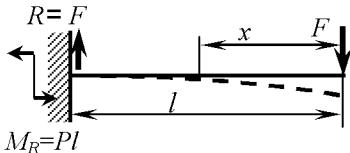


Рис. 38. Определение перемещений консольной балки

Дифференциальное уравнение изогнутой продольной оси балки

$$z''(x) = \frac{M_y(x)}{EJ_y} = \frac{-Fx}{EJ_y}.$$

Проинтегрировав его, получим уравнение углов поворота сечений $\theta(x) = z'(x)$:

$$\theta(x) = z'(x) = \frac{-Fx^2}{2EJ_y} + C *.$$

Проинтегрировав его ещё раз, получим уравнение прогибов $z(x)$:

$$z(x) = \frac{-Fx^3}{6EJ_y} + C * x + D *.$$

Рассмотрим перемещения в начале координат при $x = 0$. Из последних уравнений получим

$$\theta(x=0) = \theta_0 = C * , \quad z(x=0) = z_0 = D * .$$

Здесь выявляется физический смысл постоянных интегрирования: они равны соответствующим *перемещениям балки в начале координат*.

Определим постоянные интегрирования из условия опирания балки: в сечении жесткого защемления ($x = l$) имеем равенство нулю угла поворота (с появлением реактивного момента) и равенство нулю прогиба (с появлением реактивной силы).

$$z(l) = 0 = \frac{-Fl^3}{6EJ_y} + C * l + D * . \quad \theta(l) = 0 = \frac{-Fl^2}{2EJ_y} + C * .$$

Тогда $C^* = \theta(0) = \theta_{\max} = \frac{Fl^2}{2EJ_y}$; $D^* = z(0) = z_{\max} = f = \frac{-Fl^3}{3EJ_y}$.

Окончательный вид уравнений углов поворота и прогибов сечений:

$$\theta(x) = z'(x) = \frac{F}{2EJ_y} (l^2 - x^2), \quad z(x) = \frac{-F}{6EJ_y} (x^3 - 3l^2x + 2l^3).$$

Эти выражения являются законом Гука для рассматриваемой балки, так как перемещения пропорциональны действующей нагрузке и обратно пропорциональны жесткости поперечного сечения при изгибе. Вид уравнений перемещений зависит от выбора начала координат, а вид эпюра перемещений, построенных по этим выражениям, не зависит. На рис. 38 штриховая линия – упругая линия балки, то есть эпюра прогибов. В рассмотренном примере использована левая система координат, поэтому для углов поворота положительное направление по часовой стрелке. Следует отметить, что при нагружении балки сосредоточенной силой максимальный прогиб зависит от длины в кубе, максимальный угол поворота – от длины в квадрате.

Рассмотрим определение перемещений в балке, имеющей n участков по нагрузке. В ней для каждого участка будет свое уравнение изгибающих моментов $M_{yi}(x)$. Применение аналитического метода для расчета перемещений дает следующую систему уравнений:

$$z_i''(x) = \frac{M_{yi}(x)}{EJ_{yi}(x)}; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\theta_i(x) = z'_i(x) = \int \frac{M_{yi}(x)}{EJ_{yi}(x)} dx + C_i^*;$$

$$z_i(x) = \int dx \int \frac{M_{yi}(x)}{EJ_{yi}(x)} dx + C_i^* x + D_i^*.$$

При интегрировании получаем $2n$ постоянных интегрирования. Для их нахождения надо иметь $2n$ кинематических граничных условий. Два граничных условия, как и ранее, имеем из характера опирания балки (рис. 36). Остальные $2(n - 1)$ граничных условия имеем из характера сопряжения балки на $(n - 1)$ границах участков. На границе i -го и $(i + 1)$ -го участков при $x_i = x_{i+1} = a_i$ имеем

$\theta_i(a_i) = \theta_{i+1}(a_i)$ – условие плавности (гладкости) упругой линии;
 $z_i(a_i) = z_{i+1}(a_i)$ – условие непрерывности (неразрывности) упругой линии балки.

Развернутая запись граничных условий образует систему из $2n$ алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования C_i^* и D_i^* . После их нахождения можно найти перемещения в любом требуемом сечении.

Пусть сечение балки одинаково по всей длине и $EJ_y(x) = \text{const}$. В этом случае возможно упрощение процедуры расчета перемещений. Рассмотрим решение для конкретной балки (рис. 39). Реактивные силы на опорах вычислены.

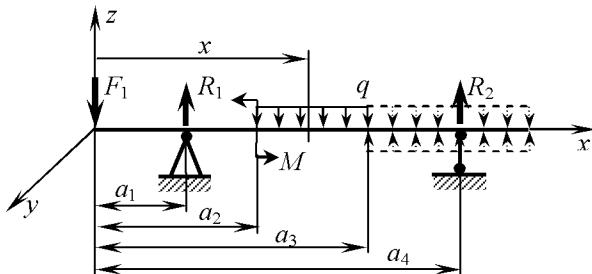


Рис. 39. Определение перемещений балки, имеющей n участков

Запишем дифференциальные уравнения упругой линии балки по участкам.

1-й участок: $0 \leq x \leq a_1$,

$$EJz_1''(x) = M_1(x) = -F_1 x .$$

2-й участок: $a_1 \leq x \leq a_2$,

$$EJz_2''(x) = M_2(x) = -F_1 x + R_1(x - a_1) .$$

3-й участок: $a_2 \leq x \leq a_3$,

$$EJz_3''(x) = M_3(x) = -F_1 x + R_1(x - a_1) - M - q(x - a_2)^2 / 2 .$$

4-й участок: $a_3 \leq x \leq a_4$,

$$EJz_4''(x) = M_4(x) = -F_1 x + R_1(x - a_1) - M - q(a_3 - a_2) \left(x - \frac{a_3 + a_2}{2} \right) .$$

5-й участок: $a_4 \leq x \leq \dots$,

$$EJz_5''(x) = M_5(x) = -F_1 x + R_1(x - a_1) - M - q(a_3 - a_2) \left(x - \frac{a_3 + a_2}{2} \right) + R_2(x - a_4) .$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим уравнения перемещений сечений (ограничимся записью для трех участков), где $C_i = C_i^* EJ$, $D_i = D_i^* EJ$.

$$EJz'_1(x) = EJ\theta_1(x) = -F_1 x^2/2 + C_1.$$

$$EJz'_2(x) = EJ\theta_2(x) = -F_1 x^2/2 + R_1(x - a_1)^2/2 + C_2.$$

$$EJz'_3(x) = EJ\theta_3(x) = -F_1 x^2/2 + R_1(x - a_1)^2/2 - Mx -$$

$$- q(x - a_2)^3/6 + C_3.$$

.....

$$EJz_1(x) = -F_1 x^3/6 + C_1 x + D_1.$$

$$EJz_2(x) = -F_1 x^3/6 + R_1(x - a_1)^3/6 + C_2 x + D_2.$$

$$EJz_3(x) = -F_1 x^3/6 + R_1(x - a_1)^3/6 - M x^2/2 -$$

$$- q(x - a_2)^4/24 + C_3 x + D_3.$$

Из условий плавности и непрерывности на границе между первым и вторым участками следует:

$$\theta_1(a_1) = \theta_2(a_1) \rightarrow -F_1 a_1^2/2 + C_1 = -F_1 a_1^2/2 + 0 + C_2 \rightarrow C_1 = C_2.$$

$$z_1(a_1) = z_2(a_1) \rightarrow -F_1 a_1^3/6 + C_1 a_1 + D_1 =$$

$$-F_1 a_1^3/6 + 0 + C_2 a_1 + D_2 \rightarrow D_1 = D_2.$$

Для границы между вторым и третьим участками следует:

$$\theta_2(a_2) = \theta_3(a_2) \rightarrow -F_1 a_2^2/2 + R_1(a_2 - a_1)^2/2 + C_2 =$$

$$-F_1 a_2^2/2 + R_1(a_2 - a_1)^2/2 - Ma_2 - 0 + C_3 \rightarrow C_2 \neq C_3.$$

$$z_2(a_2) = z_3(a_2) \rightarrow D_2 \neq D_3.$$

Для этой балки с пятью участками имеем 10 граничных условий с учетом условий опирания, то есть систему из 10 алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования C_i , D_i . Решение этой системы довольно трудоемко. Трудности возрастают с увеличением числа участков.

В этом примере некоторые постоянные интегрирования получились одинаковыми по участкам, некоторые – разными. Ясно, что решение значительно упростится, если добиться равенства постоянных интегрирования по всем участкам:

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = C, \quad D_1 = D_2 = \dots = D_n = D.$$

Для равенства постоянных интегрирования требуется выполнить 4 правила.

1. Начало координат (базовое) располагается в крайней левой точке балки (можно крайней правой). Рассматривается равновесие той части, которая содержит начало координат.

2. Все слагаемые в уравнении моментов от внешних усилий должны иметь сомножитель типа $\dots(x - a_i)^k/k!$,

где a_i – расстояние от начала координат до соответствующего усилия;

k – показатель степени; нормирует размерность, зависит от вида внешнего усилия;

для сосредоточенного момента $k(M; M_R) = 0$, ($0! = 1$);

для сосредоточенной силы $k(P; R) = 1$, ($1! = 1$);

для постоянной распределенной силы $k(q) = 2$, ($2! = 2$).

$k! = 1 \cdot 2 \cdots k$ – факториал.

3. При переходе от участка к участку все слагаемые в уравнениях не должны менять своего вида.

Для выполнения этого правила оканчивающаяся постоянная распределенная сила должна быть преобразована: продолжена до конца балки, а вновь добавленная сила уравновешена равной встречной, и каждая из этих нагрузок (заданная с продолжением и уравновешивающая) описывается своим слагаемым.

4. Интегрирование уравнений проводится без раскрытия скобок, так как $dx = d(x - a_i)$.

Вернемся к примеру и запишем дифференциальные уравнения упругой линии балки по участкам с учетом этих правил, часть из которых уже применялась.

1-й участок: $0 \leq x \leq a_1$,

$$EJz''_1(x) = M_1(x) = -F_1x = -F_1(x - 0)^1/1!$$

2-й участок: $a_1 \leq x \leq a_2$,

$$EJz''_2(x) = M_2(x) = -F_1x + R_1(x - a_1).$$

3-й участок: $a_2 \leq x \leq a_3$,

$$\begin{aligned} EJz''_3(x) = M_3(x) = & -F_1x + R_1(x - a_1)^1/1! - M(x - a_2)^0/0! - \\ & - q(x - a_2)^2/2!. \end{aligned}$$

4-й участок: $a_3 \leq x \leq a_4$,

$$EJz''_4(x) = M_4(x) = -F_1x + R_1(x - a_1) - M(x - a_2)^0 - \\ - q(x - a_2)^2/2 + q(x - a_3)^2/2.$$

5-й участок: $a_4 \leq x \leq \dots$,

$$EJz''_5(x) = M_5(x) = -F_1x + R_1(x - a_1) - M(x - a_2)^0 - \\ - q(x - a_2)^2/2 + q(x - a_3)^2/2 + R_2(x - a_4).$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим уравнения перемещений сечений, где постоянные интегрирования будут одинаковыми по участкам (убедитесь в этом самостоятельно).

Проанализируем структуру дифференциальных уравнений упругой линии балки по участкам. Видно, что уравнение для любого участка целиком и в неизменном виде входит в уравнение следующего участка. То же имеем для уравнений углов поворота и прогибов сечений. Следовательно, можно ограничиться составлением и интегрированием одного дифференциального уравнения упругой линии – уравнения последнего (крайнего правого) участка балки. Чтобы из этого уравнения можно было получить уравнения предыдущих участков, в него вводят функциональный прерыватель (предложен Н.Г. Бубновым), который вводит дискретность, прерывистость. Дифференциальное уравнение упругой линии балки с прерывателями называют универсальным, так как оно верно для любого участка рассматриваемой балки.

$$EJ_y z''(x) = M_y(x) = -F_1x + \left|_{x \geq a_1} R_1 \cdot (x - a_1) - \right|_{x \geq a_2} M(x - a_2)^0 - \\ - q(x - a_2)^2/2 + \left|_{x \geq a_3} q(x - a_3)^2/2 + \right|_{x \geq a_4} R_2(x - a_4).$$

Здесь $\left|_{x \geq a_i} \dots \right.$ – функциональный прерыватель. При выполнения условия при прерывателе слагаемые, следующие за ним, верны и используются. При не выполнении условия при прерывателе слагаемые, следующие за ним, отбрасываются (умножаются на ноль). Для контроля правильности универсального дифференциального уравнения надо следить за совпадением величин в условии при прерывателе и в скобках.

Проинтегрировав это универсальное дифференциальное уравнение упругой линии балки, получим универсальные уравнения углов поворота и прогибов сечений (в этих уравнениях прерыватели пишутся; правила интегрирования при этом не меняются).

$$EJ_y \theta(x) = EJ_y z'(x) = C - F_1 x^2 / 2 + \sum_{x \geq a_1} R_1 (x - a_1)^2 / 2 - \\ - \sum_{x \geq a_2} M (x - a_2)^1 - q(x - a_2)^3 / 3! + \sum_{x \geq a_3} q(x - a_3)^3 / 6 + \\ + \sum_{x \geq a_4} R_2 (x - a_4)^2 / 2.$$

$$EJ_y z(x) = D + Cx - F_1 x^3 / 3! + \sum_{x \geq a_1} R_1 (x - a_1)^3 / 6 - \\ - \sum_{x \geq a_2} M (x - a_2)^2 / 2 - q(x - a_2)^4 / 4! + \sum_{x \geq a_3} q(x - a_3)^4 / 24 + \\ + \sum_{x \geq a_4} R_2 (x - a_4)^3 / 6.$$

Здесь $C = \theta_0 EJ_y$, $D = z_0 EJ_y$. Они одинаковы для всех участков и действительны при $x \geq 0$, поэтому записаны в начале уравнений. Их ищем из условий опищения: на шарнирных опорах $z(x = a_1) = 0$ и $z(x = a_4) = 0$.

$$0 = EJ_y z(a_1) = D + Ca_1 - F_1 a_1^3 / 6 + 0. \\ 0 = EJ_y z(a_4) = D + Ca_4 - F_1 a_4^3 / 6 + R_1 (a_4 - a_1)^3 / 6 - \\ - M (a_4 - a_2)^2 / 2 - q(a_4 - a_2)^4 / 24 + q(a_4 - a_3)^4 / 24 + 0.$$

После вычисления постоянных интегрирования C и D можно определить углы поворота и прогибы в нужных сечениях балки или построить их эпюры, расчеты которых удобнее сделать в табличной форме.

Для контроля эпюры прогибов надо помнить правило знаков изгибающих моментов: эпюра изгибающих моментов строится со стороны сжатых волокон, или при положительном моменте упругая линия балки имеет выпуклость вниз.

В учебниках чаще излагают вариант метода Бубнова – метод начальных параметров, в котором функциональные прерыватели не пишутся, но подразумеваются.

В зависимости от назначения балок в дополнение или взамен условий прочности может требоваться выполнение условий жесткости. Соответственно двум видам перемещений сечений в балке может использоваться одно из двух условий жесткости балочных конструкций:

$$f = z_{\max} \leq [f]; \quad \theta_{\max} \leq [\theta].$$

Здесь $f = z_{\max}$, θ_{\max} – максимальные значения прогиба балки и угла поворота; влияние длины на их величину зависит от вида нагрузки:

$$f_{\max} = \frac{\alpha_1 F l^3}{EJ_y}; \quad \dots = \frac{\alpha_2 M l^2}{EJ_y}; \quad \dots = \frac{\alpha_3 q l^4}{EJ_y};$$

$$\theta_{\max} = \frac{\beta_1 F l^2}{EJ_y}; \quad \dots = \frac{\beta_2 M l}{EJ_y}; \quad \dots = \frac{\beta_3 q l^4}{EJ_y}.$$

$[f]$, $[\theta]$ – допускаемые значения перемещений сечений, которые зависят только от назначения балочных конструкций, а не от материала; обычно

$$f/l \leq 1/250 \dots 1/500; \quad \theta_{\max} \leq 0,0001 \text{ рад},$$

где l – длина пролета или консоли.

Углы поворота ограничиваются в опорных сечениях валов при использовании роликовых подшипников качения или подшипников скольжения. Прогибы ограничиваются в подкрановых балках, для недопущения резонанса при поперечных колебаниях валов и балок.

Пример 7

Для заданной балки (рис. 40) построить эпюры внутренних усилий и прогибов.

1. Реактивные усилия.

Уравнения равновесия (моментов) относительно опор:

$$\sum_2 M = Fl - ql^2/2 - M + R_4 2l + (ql) 2,5l = 0; \quad R_4 = -0,75 ql.$$

$$\sum_4 M = F3l - R_2 2l + (ql) 1,5l - M + ql^2/2 = 0; \quad R_2 = 1,25 ql.$$

$$\text{Проверка: } \sum F_z = 0; \quad -F + R_2 - ql + R_4 + ql = 0.$$

2. Внутренние усилия.

1-й участок (левая часть балки): $x \in [0; l]$.

$$Q_z(x) = -F = -ql/2 = \text{const.}$$

$$M_y(x) = -Fx \text{ (наклонная прямая);}$$

$$M_y(0) = 0; \quad M_y(l) = -Fl = -ql^2/2.$$

2-й участок (левая часть балки): $x \in [l; 2l]$.

$$Q_z(x) = -F + R_2 - q(x-l) \text{ (наклонная прямая);}$$

$$Q_z(l) = -F + R_2 = 3ql/4; \quad Q_z(2l) = -F + R_2 - ql = -ql/4.$$

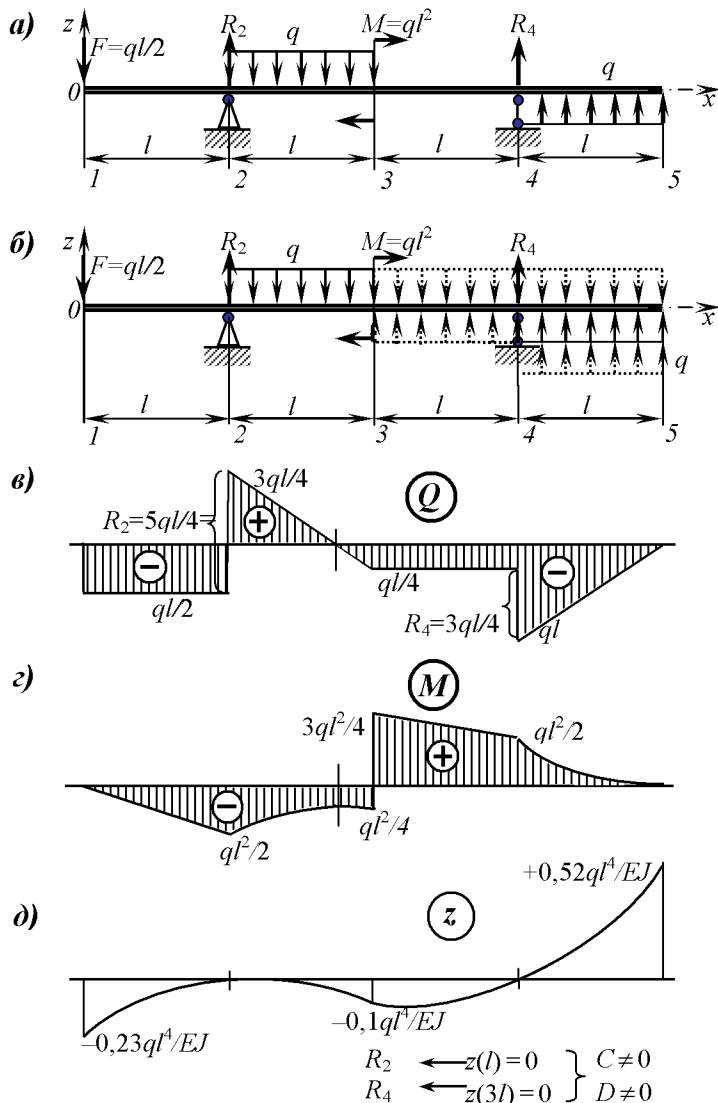


Рис. 40. Расчет прогибов:
 а – расчетная схема; б – то же с преобразованной распределенной силой; в – эпюра поперечных сил; г – эпюра изгибающих моментов; д – эпюра прогибов

$M_y(x) = -Fx + R_2(x-l) - q(x-l)^2/2$ (парабола выпуклостью вверх);

$$M_y(l) = -Fl = -ql^2/2; \quad M_y(2l) = -F2l + R_2 l - ql^2/2 = -ql^2/4.$$

На этом участке $Q_z(x)$ меняет знак, поэтому на эпюре $M_y(x)$ имеется максимум:

$$Q_z(x_m) = -F + R_2 - q(x_m - l) = 0; \quad x_m = l + (-F + R_2)/q = 7l/4.$$

$$M_{y\max} = M_y(x_m) = -7ql^2/32.$$

3-й участок (левая часть балки): $x \in [2l; 3l]$,

$$Q_z(x) = -F + R_2 - ql = -ql/4 = \text{const}.$$

$$M_y(x) = -Fx + R_2(x-l) - ql(x-3l/2) + M \quad (\text{наклонная прямая}).$$

С учетом преобразования распределенной силы (рис. 36,б)

$$M_y(x) = -Fx + R_2(x-l) - q(x-l)^2/2 + M(x-2l)^0 + q(x-2l)^2/2;$$

$$M_y(2l) = -F2l + R_2 l - ql^2/2 + M = 3ql^2/4;$$

$$M_y(3l) = -F3l + R_2 2l - 3ql^2/2 + M = ql^2/2.$$

4-й участок (левая часть балки): $x \in [3l; 4l]$,

$$Q_z(x) = -F + R_2 - ql + R_4 + q(x-3l) \quad (\text{наклонная прямая});$$

$$Q_z(3l) = -F + R_2 - ql + R_4 = -ql; \quad Q_z(4l) = -F + R_2 - ql + R_4 + ql = 0.$$

$$M_y(x) = -Fx + R_2(x-l) - ql(x-3l/2) + M + R_4(x-3l) + q(x-3l)^2/2$$

(парабола выпуклостью вниз).

С учетом преобразования распределенной силы (рис. 36,б)

$$M_y(x) = -Fx + R_2(x-l) - q(x-l)^2/2 + M(x-2l)^0 + q(x-2l)^2/2 + R_4(x-3l) + q(x-3l)^2/2;$$

$$M_y(3l) = -F3l + R_2 2l - 3ql^2/2 + M = ql^2/2;$$

$$M_y(4l) = -F4l + R_2 3l - 5ql^2/2 + M + R_4 l + ql^2/2 = 0.$$

Опасным в балке является сечение посередине пролета справа от сосредоточенного момента (рис. 36,г), где

$$|M_{\max}| = M_y(2l) = 3ql^2/4.$$

3. Перемещения.

Универсальное дифференциальное уравнение изогнутой продольной оси балки

$$EJ_y z''(x) = M_y(x) = -F x + \Big|_{x \geq l} R_2(x-l) - q(x-l)^2/2 +$$

$$+ \Big|_{x \geq 2l} M(x-2l)^0 + q(x-2l)^2/2 + \Big|_{x \geq 3l} R_4(x-3l) + q(x-3l)^2/2.$$

Универсальное уравнение углов поворота сечений

$$EJ_y \theta(x) = EJ_y z'(x) = C - F x^2/2 + \Big|_{x \geq l} R_2(x-l)^2/2 - q(x-l)^3/6 +$$

$$+ \Big|_{x \geq 2l} M(x-2l)^1 + q(x-2l)^3/6 + \Big|_{x \geq 3l} R_4(x-3l)^2/2 + q(x-3l)^3/6.$$

Универсальное уравнение прогибов

$$EJ_y z(x) = D + Cx - Fx^3/6 + \sum_{x \geq l} [R_2(x-l)^3/6 - q(x-l)^4/24 + \sum_{x \geq 2l} M(x-2l)^2/2 + q(x-2l)^4/24 + \sum_{x \geq 3l} R_4(x-3l)^3/6 + q(x-3l)^4/24].$$

Используем граничные условия балки (условия на опорах):
 $z(x=l)=0, \quad 0=D+Cl-Fl^3/6;$
 $z(x=3l)=0,$
 $0=D+C\cdot 3l-F(3l)^3/6+R_2(2l)^3/6-q(2l)^4/24+Ml^2/2+ql^4/24.$
 $C=15ql^3/48=0,3125ql^3; \quad D=-11ql^4/48=-0,2292ql^4.$

Расчет значений эпюры прогибов проведем в табличной форме, где значения слагаемых даны в безразмерном виде:

x	0	0,5l	1,0l	1,5l	2,0l	2,5l	3,0l	3,5l	4,0l
$D/(ql^4)$	-0,2292	-0,2292	-0,2292	-0,2292	-0,2292	-0,2292	-0,2292	-0,2292	-0,2292
$Cx/(ql^4)$	0	0,1562	0,3125	0,4688	0,6250	0,7812	0,9375	1,0938	1,2500
$-Px^3/(6ql^4)$	—	-0,0104	-0,0833	-0,2815	-0,6667	-1,3021	-2,2500	-3,5729	-5,3333
$+R_2(x-l)^3/(6ql^4)$	—	—	0	0,0260	0,2083	0,7031	1,6667	3,2552	5,6250
$-q(x-l)^4/(24ql^4)$	—	—	0	-0,0026	-0,0417	-0,2109	-0,6667	-1,6276	-3,3750
$+M(x-2l)^2/(2ql^4)$	—	—	—	—	0	0,1250	0,5000	1,1250	2,0000
$+q(x-2l)^4/(24ql^4)$	—	—	—	—	0	0,0026	0,0417	0,2109	0,6667
$+R_4(x-3l)/(6ql^4)$	—	—	—	—	—	—	0	-0,0156	-0,1250
$+q(x-3l)^4/(24ql^4)$	—	—	—	—	—	—	0	0,0026	0,0417
$\Sigma = zEJ/(ql^4)$	-0,2292	-0,0834	0,0	-0,0185	-0,1047	-0,1303	0,0	0,2422	0,5209

Сравнение эпюр изгибающих моментов (рис. 40,ε) и прогибов (рис. 40,δ) позволяет проконтролировать правильность их построения. На участках, где изгибающий момент положителен, балка изгибается выпуклостью вниз.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Феодосьев**, Всеволод Иванович. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / В.И. Феодосьев. – Изд. 10-е, перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.
2. **Вольмир**, Арнольд Сергеевич. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / А.С. Вольмир, Ю.П. Григорьев, А.И. Станкевич. – М.: Дрофа, 2007. – 591 с.
3. **Биргер**, Исаак Аронович. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / И.А. Биргер, П.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
4. **Сопротивление** материалов: учеб. для вузов / под ред. Г.С. Писаренко. – Изд. 5-е, перераб. и доп. – Киев: Выща. шк., 1986. – 776 с.
5. **Беляев**, Николай Михайлович. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1987. – 630 с.
6. **Степин**, Петр Андреевич. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / П.А. Степин. – М.: Высш. шк., 1988.– 180 с.
7. **Филатов**, Юрий Евгеньевич. Расчеты на прочность и жесткость для простых видов сопротивлений: метод. указания / Ю.Е. Филатов, В.И. Шапин; Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2002. – 56 с. – (№ 1505).
8. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. А.С. Вольмира. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
9. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. В.К. Качурина. – М.: Наука, 1972. – 422 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Расчетные схемы. Нагрузки	3
2. Внутренние усилия	6
3. Дифференциальные зависимости между усилиями при изгибе	13
4. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса	20
5. Геометрические характеристики плоских сечений	25
6. Прочность при прямом изгибе	33
7. Касательные напряжения при попереч- ном изгибе	43
8. Напряженное состояние при прямом по- перечном изгибе	51
9. Перемещения при изгибе. Дифференци- альное уравнение изогнутой продольной оси балки	55
Библиографический список	70

ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

Методические указания

Составитель ФИЛАТОВ Юрий Евгеньевич

Редактор М.А. Иванова

Подписано в печать 11.11. Формат 60x84¹/₁₆.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,18.

Тираж 200 экз. Заказ

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический
университет имени В.И. Ленина»

Отпечатано в УИУНЛ ИГЭУ

153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34.