ПОРОУПРУГИЕ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЕЙ

Л.Б. Маслов

Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина, Иваново

Представлена математическая модель костной ткани, описываемая динамическими уравнениями теории эффективной пороупругости и определяющими уравнениями анизотропной сплошной среды. Разработан алгоритм расчета пороупругих констант эффективной сплошной среды, необходимый для математического моделирования деформирования биологических структур как пороупругих сред. Для численного анализа использована формулировка метода конечных алгоритм в виде «перемещения упругого каркаса – давление в порах» и разработана конечно-элементная модель голени человека. Проведен расчет вынужденных гармонических колебаний модели большеберцовой кости и исследовано распределение давления в порах компактного и губчатого вещества. Показано, что вибрационные потоки жидкости в системе пор костной ткани зависят от частоты возбуждения и могут достигать существенных значений на резонансных формах колебаний. Полученные результаты могут служить теоретическим фундаментом для разработки вибрационных методов реабилитации и контроля физиологического состояния костной ткани спортсменов, космонавтов, пожилых и перенесших травмы людей.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТКАНИ КАК ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЫ

В последние десятилетия пороупругие модели биологических тканей получили распространение и успешно применяются в биомеханике. Уравнениями пороупругости более точно, чем классическими уравнениями идеальной упругости, описываются процессы деформации и адаптации костной, хрящевидной и соединительной тканей, а также исследуется применимость теории пороупругости для описания мышечной тканей. Определяющие соотношения, записанные относительно осредненных по представительному элементу среды перемещений твердой $\mathbf{u}$ и жидкой $\mathbf{U}$ фаз, были сформулированы Био на основе феноменологического подхода [1] и впоследствии получили обобщение в работах Нигматулина [2]. В предположении упругой модели твердой фазы и модели идеальной сжимаемой жидкости фазовые уравнения преобразуются в определяющие соотношения пороупругой среды в «u-p» переменных (перемещение упругого каркаса – давление поровой жидкости). Кинематической переменной жидкой фазы является вектор относительного перемещения $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{U} - \mathbf{u})$ или дивергенция этого вектора $\zeta = -\nabla \cdot \mathbf{w}$, имеющая физический смысл относительного изменения объемного содержания жидкости в порах. Для случая анизотропии упругих и гидростатических свойств уравнения примут вид

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = \boldsymbol{\sigma}_{dr}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}p \equiv \mathbf{C}_{dr} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}p, \quad \zeta(\mathbf{u}, p) = \mathbf{A} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \phi^2 R^{-1} p, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – полный тензор напряжений; $\boldsymbol{\sigma}_{dr}$ – тензор напряжений в точках твердой фазы, вызываемый только упругими деформациями; $\mathbf{C}_{dr}$ – тензор упругих модулей среды в дренированном состоянии; $\mathbf{A}$ – тензор коэффициентов эффективных напряжений Био; p – давление поровой жидкости; R – гидростатическая константа, имеющая смысл модуля объемного сжатия жидкой фазы; ϕ – пористость.

С учетом выражения тензора напряжений в идеальной сжимаемой жидкости и схемы Рахматулина силового взаимодействия и совместного деформирования фаз [2] система уравнений динамики пороупругой среды примет вид краевой задачи относительно изображений искомых функций $\mathbf{u}$ и p:

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{dr} - s^2\left(\rho\mathbf{E} - \rho_f \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(s)\right) \cdot \hat{\mathbf{u}} - \left(\mathbf{A} - \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(s)\right) \cdot \nabla\hat{p} = -\hat{\mathbf{f}}_V + \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(s) \cdot \hat{\mathbf{f}}_f, \tag{2}$$

$$s^{-1}\nabla \cdot \left(\tilde{\mathbf{K}}(s) \cdot \nabla\hat{p}\right) - \phi^2 R^{-1}\hat{p} - \left(\mathbf{A} - \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(s)\right) \cdot\cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = s^{-1}\hat{\gamma}_f, \tag{3}$$

где s – параметр Лапласа; ρ – полная плотность; ρ_f – плотность жидкости, $\mathbf{E}$ – единичный тензор; $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} = \rho_f s \tilde{\mathbf{K}}$ – тензор, характеризующий инерционное взаимодействие фаз; $\mathbf{f}_V$ – объемная сила; $\tilde{\mathbf{K}}(s) = \left(s\mathbf{E} + \tau\phi^{-1}\rho_f s^2 \mathbf{K}\right)^{-1} \cdot s\mathbf{K}$ – приведенная комплексная гидравлическая проницаемость среды; τ – параметр искривленности поровых каналов; $\hat{\gamma}_f = \nabla \cdot \left(\tilde{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{f}}_f\right)$ – плотность внутренних источников жидкости.

При замене параметра Лапласа на комплексное выражение $s = i\omega$ получим уравнения вынужденных колебаний пороупругой среды под действием силы, изменяющейся по гармоническому закону.

ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЕЙ

Для определения эффективных материальных характеристик пороупругой среды $\mathbf{C}_{dr}$, $\mathbf{A}$ и R, входящих в (1), их явные выражения через физико-механические характеристики отдельных фаз не могут быть непосредственно использованы, поскольку сами эти характеристики не всегда известны, а их нахождение не менее сложно. Для решения данной задачи применен дифференциальный метод самосогласования, позволяющий определить эффективные упругие модули в случае большой пористости, и методы микромеханики для расчета коэффициентов эффективных напряжений Био и гидростатической константы. Разработанный алгоритм вычисления эффективных упругих модулей анизотропной двухфазной среды $\mathbf{C}_{eff}$ при произвольных значениях пористости описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{C}_{eff}(\phi)}{d\phi} = \frac{\mathbf{C}_{eff}(\phi)\cdot\cdot\widehat{\mathbf{T}}(\phi)}{1-\phi}, \tag{4}$$

в котором выражение тензорной функции $\widehat{\mathbf{T}}$ имеет вид

$$\widehat{\mathbf{T}}(\phi) = \left(\mathbf{C}_{eff}(\phi) + \mathbf{\Delta}(\phi)\cdot\cdot\mathbf{S}(\phi)\right)^{-1}\cdot\cdot\mathbf{\Delta}(\phi), \qquad \mathbf{\Delta}(\phi) = \mathbf{C}_{inc} - \mathbf{C}_{eff}(\phi), \tag{5}$$

где $\mathbf{S}$ – тензор Эшелби, определяющий поле деформаций вокруг эллипсоидального включения в бесконечной упругой среде; $\mathbf{C}_{inc}$ – тензор упругих модулей материала включения.

С помощью формул (4)–(5) проведен численный анализ эффективных характеристик твердых и мягких биологических тканей как пороупругих сред в дренированном состоянии при произвольных значениях пористости в случае принятия модели трансверсально-изотропного тела.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ БОЛЬШЕБЕРЦОВОЙ КОСТИ

Для численного решения задачи пороупругости (2)–(3) применен метод конечных элементов [3]. Если внешние нагрузки изменяются по гармоническому закону, то отклик линейной системы также представляет собой гармонические во времени функции, что приводит к системе матричных уравнений:

$$\left(\mathbf{K}_{dr} - \omega^2\mathbf{M} - \widetilde{\mathbf{L}}(i\omega)\right)\mathbf{U} - \left(\mathbf{H}_1 + \widetilde{\mathbf{H}}_2(i\omega)\right)\mathbf{P} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S, \tag{6}$$

$$-\left(\mathbf{H}_1 + \widetilde{\mathbf{H}}_2(i\omega)\right)^T\mathbf{U} + \left(-\mathbf{D} + i\omega^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}(i\omega)\right)\mathbf{P} = -i\omega^{-1}\mathbf{Q}^*, \tag{7}$$

где $\mathbf{K}_{dr}$, $\mathbf{M}$ – глобальные матрицы жесткости и массы; $\widetilde{\mathbf{L}}$ – дополнительная матрица массы; $\mathbf{H}_1$, $\widetilde{\mathbf{H}}_2$ – матрицы взаимного влияния; $\mathbf{D}$, $\widetilde{\mathbf{G}}$ – матрицы насыщения и проницаемости; $\mathbf{U}$, $\mathbf{P}$ – глобальные векторы комплексных амплитудных значений перемещений и давлений в узлах конечно-элементной сетки.

С помощью базы данных фотографических снимков поперечных сечений тела человека построена трехмерная реалистичная конечно-элементная модель голени. Модель включает в себя основные элементы опорно-двигательной системы голени, такие как берцовые большую и малую кости, ахиллово сухожилие, трехглавую мышцу, мышцы передней поверхности, кожный покров. При численном решении уравнений (6)–(7) использован пространственный изопараметрический конечный элемент с параболической интерполяцией геометрии и функций. Путем исследования сходимости тестового численного решения выбрана адекватная по точности сетка, состоящая из 3264 конечных элементов и 14238 узлов.

Уточненные значения вязкоупругих характеристик тканей включены в полную модель голени, и исследованы колебания большеберцовой кости под действием поперечной силы, изменяющейся по гармоническому закону. Первые резонансные частоты, наблюдаемые на графиках АЧХ, соответствуют основным изгибным формам большеберцовой кости преимущественно в двух физиологических плоскостях. При этом малоберцовая кость совершает синфазное или противофазное движение, а мягкие ткани вносят дополнительный вклад в пространственные формы колебаний полной модели голени. Показано, что на резонансных режимах максимальных значений достигают как компоненты вектора перемещений, так и давление и компоненты вектора потока внутритканевой жидкости. Это особенно заметно на частоте 325…330 Гц в среднем сечении голени в точках вблизи фронтальной плоскости, что связано с расположением главной плоскости соответствующей формы колебаний.

Литература

1. Biot M.A. // Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, part I: low frequency range, J. Acoust. Soc. Am., 1956, Vol. 28, № 2, P. 168–178.
2. Нигматулин Р.И. / Основы механики гетерогенных сред, М.: Наука, 1978, 336 с.
3. Маслов Л.Б. / Математическое моделирование колебаний пороупругих систем: Иваново: Изд-во ИГЭУ, 2010, 264 с.