

# Динамический анализ стержневой системы

*Выполнил Скрипов С.И., студ. гр. 5-33  
Руководитель: Огурцов Ф.Б., к.т.н., доц.*

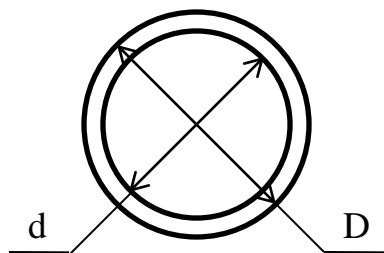
# Предварительное конструирование лабораторного стенда

Размеры стенда:

Длина стержня -  $l_3 = 0.6$  м

Сечение стержня:

тонкостенное кольцо



$$D = 0.01 \text{ м}$$

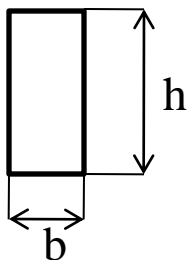
$$d = 0.008 \text{ м}$$

$$l_1 = 0.3 \text{ м}$$

$$l_2 = 0.45 \text{ м}$$

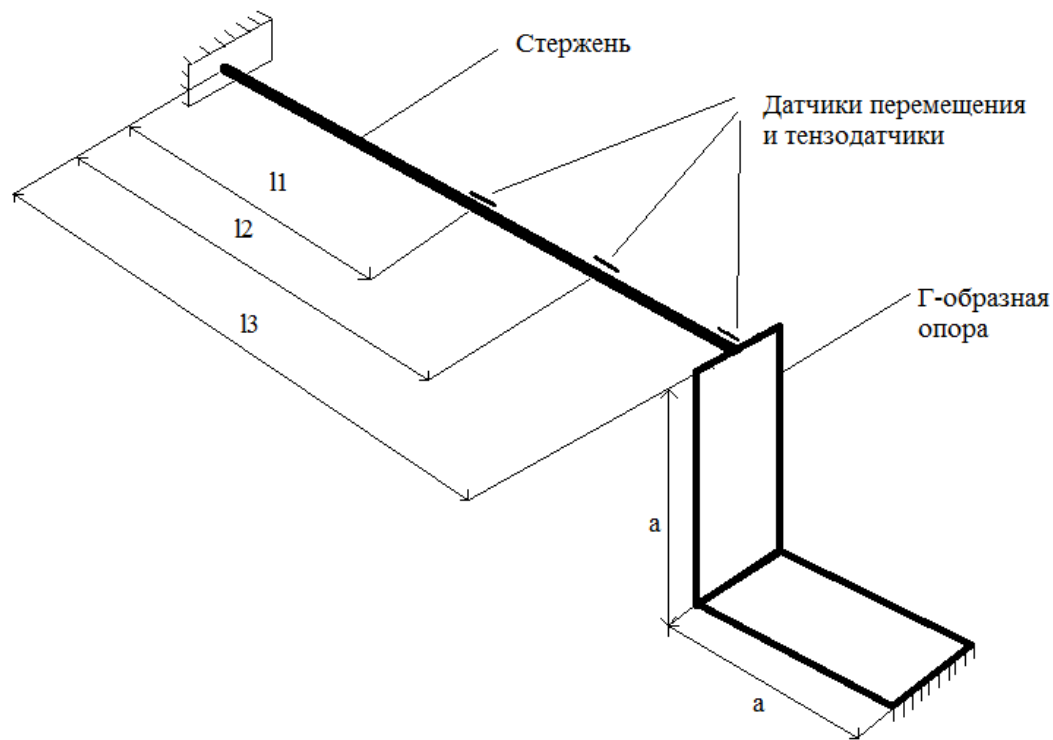
Длина опоры  $a = 0.15$  м

Сечение опоры: прямоугольник

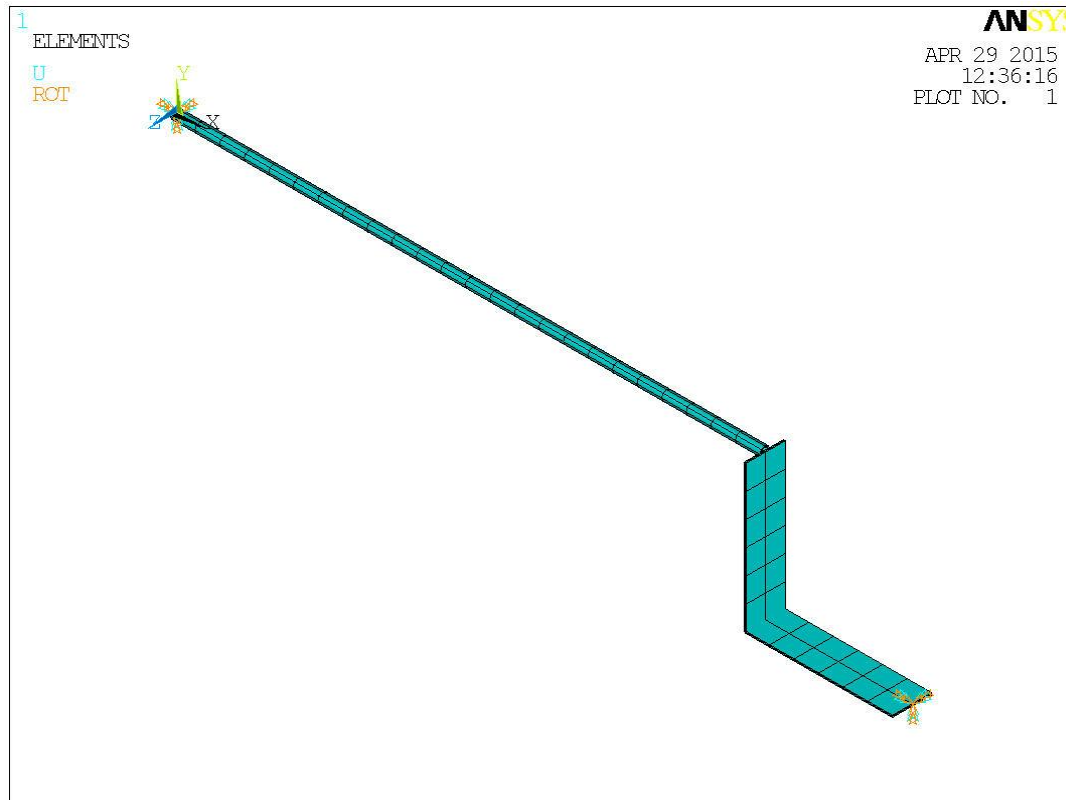


$$b = 0.002 \text{ м}$$

$$h = 0.04 \text{ м}$$



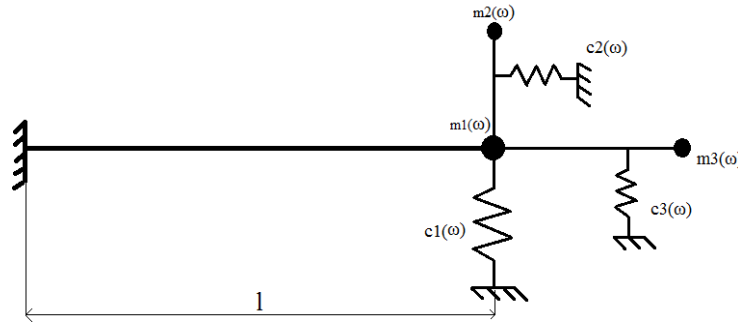
# Проектирование макета стенда в программном комплексе ANSYS Inc.



# Результаты расчета в ANSYS Inc.

Частота, Гц	Прогиб в середине балки (8 узел), м	Прогиб на конце балки (20 узел), м	Угол поворота на конце балки ( 20 узел), рад
43,806	$-0,95565 \times 10^{-3}$	$-2,5085 \times 10^{-3}$	$-5,2749 \times 10^{-3}$
124,44	$-3,9165 \times 10^{-3}$	$0,94116 \times 10^{-3}$	$25,934 \times 10^{-3}$
315,63	$-1,0645 \times 10^{-3}$	$-0,47122 \times 10^{-3}$	$-30,398 \times 10^{-3}$

# Оценка динамической жесткости опор



$$E \cdot J \cdot y^{IV}(x, t) + \rho \cdot F \cdot \ddot{y}(x, t) = 0$$

$$y(x, t) = y(x) \cdot \text{Cos}(\omega_k t)$$

$$y(x) = c \cdot 2S\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) + d \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) + e \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) + f \cdot 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right)$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

1-й вариант

$$E \cdot J \cdot y'''(l) = R \quad R = m_{11}(\omega) \cdot \ddot{y} + m_{12}(\omega) \cdot \ddot{\varphi} + c_{11}(\omega) \cdot y + c_{12}(\omega) \cdot \varphi$$

$$E \cdot J \cdot y''(l) = M \quad M = m_{21}(\omega) \cdot \ddot{y} + m_{22}(\omega) \cdot \ddot{\varphi} + c_{21}(\omega) \cdot y + c_{22}(\omega) \cdot \varphi$$

$y = y(l, t) = y(l) \cdot \text{Cos}(\omega_k t)$  -линейное перемещение на опоре

$\varphi = y'(l, t) = y'(l) \cdot \text{Cos}(\omega_k t)$  -угол поворота на опоре

2-й вариант

$$y(l) = y_3 \quad y'(l) = \theta_3$$

$$\frac{y(l)}{y'(l)} = \alpha \quad \Delta = \sqrt{\frac{l^2 \omega}{\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}}}$$

$$-E \cdot J \cdot y''''(l) = c_{11}y(l) + c_{12}y'(l) + m_{11}\ddot{y}(l) + m_{12}\dot{y}'(l)$$

$$-E \cdot J \cdot y''(l) = c_{21}y(l) + c_{22}y'(l) + m_{21}\ddot{y}(l) + m_{22}\dot{y}'(l)$$

$$K_y = c_{11} + \frac{c_{12}}{\alpha} - m_{11}\omega_1^2 - \frac{m_{12}\omega_1^2}{\alpha}$$

$$-E \cdot J \cdot y''''(l) = K_y \cdot y(l)$$

$$K_\varphi = c_{21}\alpha + c_{22} - m_{21}\omega_1^2\alpha - m_{22}\omega_1^2$$

$$-E \cdot J \cdot y''(l) = K_\varphi \cdot y'(l)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_y = \frac{-E \cdot J \cdot \frac{\Delta^3}{l^3} \cdot \left( e \cdot 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) + f \cdot 2S\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)}{\left( e \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) + f \cdot 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)} \\ K_\varphi = \frac{-E \cdot J \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot \left( e \cdot 2S\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) + f \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)}{\left( e \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) + f \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)} \\ \alpha = \frac{y(l)}{y'(l)} = \frac{\left( e \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) + f \cdot 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)}{\frac{\Delta}{l} \cdot \left( e \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) + f \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)} \end{array} \right.$$

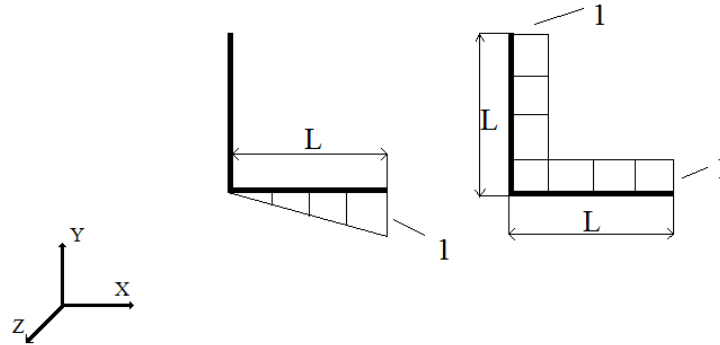
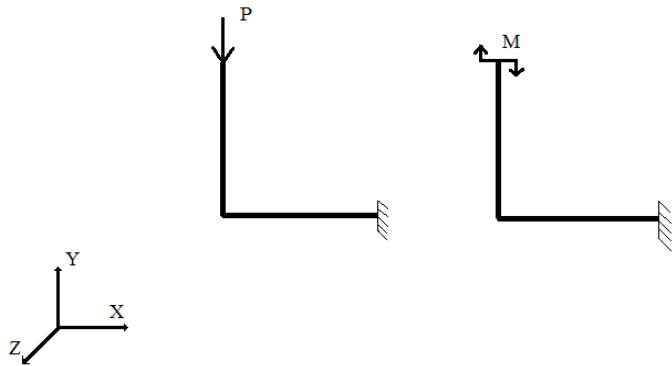
$K_y$

$$-E \cdot J \cdot \frac{\Delta^3}{l^3} \cdot \left( \frac{\left( \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right) \cdot 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right)}{\left( 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)} + 2S\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right) \\ = \frac{\left( \frac{\left( \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right) \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right)}{2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right)} + 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)}{\left( \frac{\left( \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right) \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right)}{2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right)} + 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)}$$

$K_\varphi$

$$-E \cdot J \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot \left( \frac{\left( \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right) \cdot 2S\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right)}{\left( 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)} + 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right) \\ = \frac{\left( \frac{\left( \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right) \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right)}{2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right)} + 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)}{\left( \frac{\left( \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - 2V\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right) \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right)}{2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) - \alpha \cdot \frac{\Delta}{l} \cdot 2T\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right)} + 2U\left(\frac{\Delta \cdot x}{l}\right) \right)}$$

# Сравнение со статической жесткостью



$$c_{11} = \frac{3 \cdot E \cdot J}{l^3} = 49778 \text{ Н/м}$$

$$c_{22} = \frac{E \cdot J}{2 \cdot l} = 186.7 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$c_{12} = -\frac{2 \cdot E \cdot J}{l^2} = 4977.8 \text{ Н}$$

$$K_y = c_{11} + \frac{c_{12}}{\alpha} = 60235 \text{ Н/м}$$

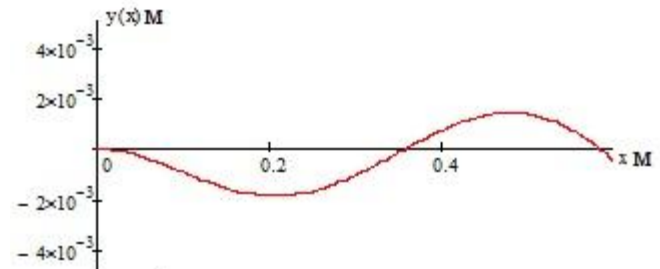
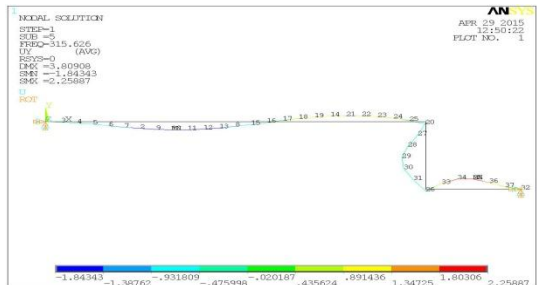
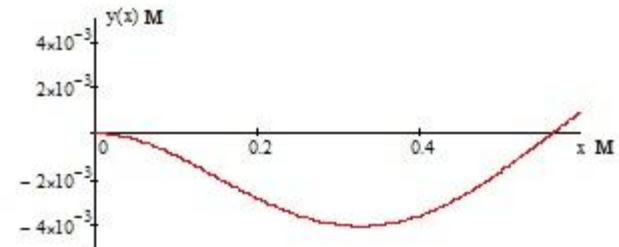
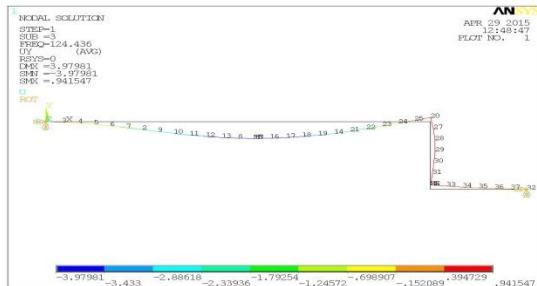
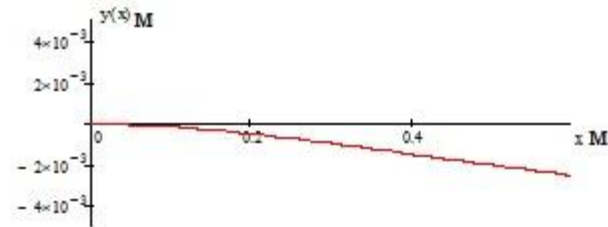
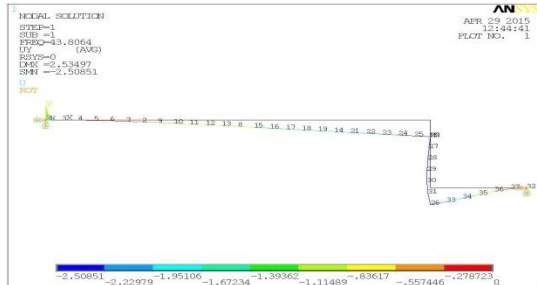
$$K_\varphi = c_{12} \cdot \alpha + c_{22} = 2556.1 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$K_y = 34960 \text{ Н/м}$$

$$K_\varphi = -1829 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

# Формы колебаний стержня при известном перемещении и угле поворота на конце балки.

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad y(l) = y_3 \quad y'(l) = \theta_3$$



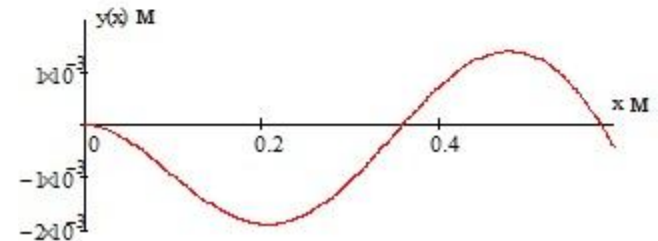
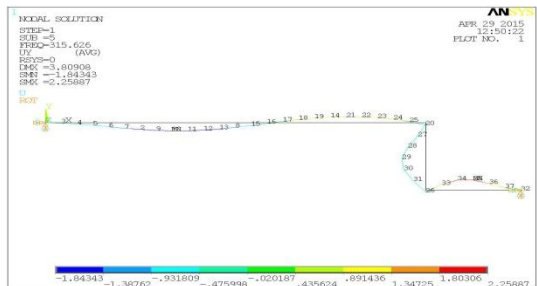
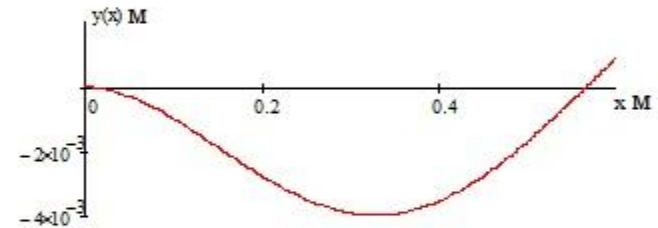
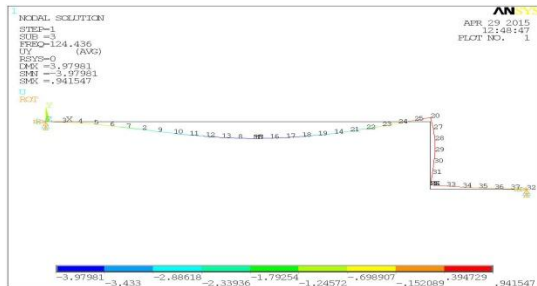
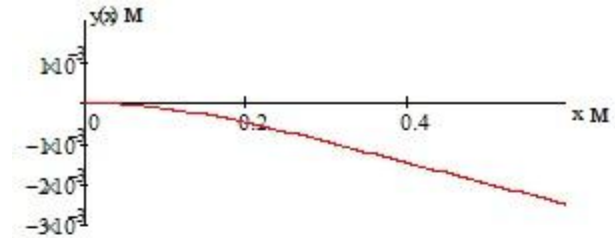
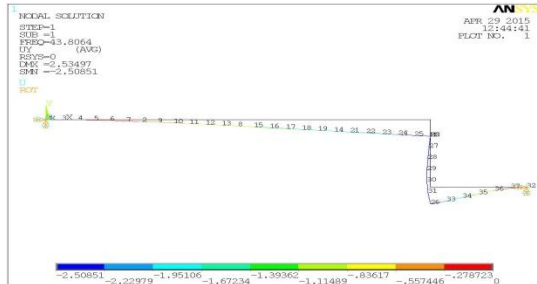
Решение ANSYS

Решение аналитическим методом



# Формы колебаний стержня при известных перемещениях в середине и на конце стержня

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad y\left(\frac{l}{2}\right) = y_1 \quad y(l) = y_3$$



# Построение форм при неизвестной безразмерной частоте.

$$y_1 = -0.95565 \times 10^{-3} \text{ м}$$

$$y_2 = 2.5085 \times 10^{-3} \text{ м}$$

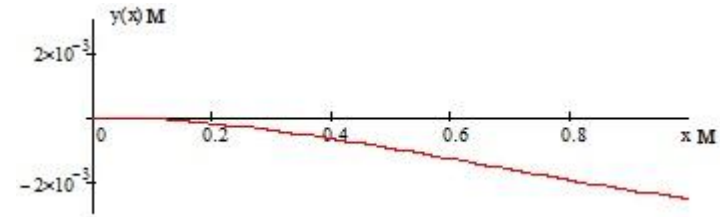
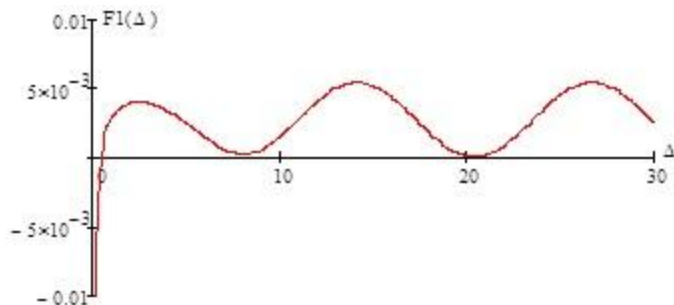
$$\Theta_2 = -5.2749 \times 10^{-3} \text{ м}$$

$$\begin{cases} e \cdot 2 \cdot U\left(\frac{\Delta}{2}\right) + f \cdot 2 \cdot V\left(\frac{\Delta}{2}\right) = y_1 \\ e \cdot 2 \cdot U(\Delta) + f \cdot 2 \cdot V(\Delta) = y_2 \\ e \cdot 2 \cdot T(\Delta) + f \cdot 2 \cdot U(\Delta) = \Theta_2 \end{cases}$$

Решение:

$$e(\Delta) := \frac{y_1 - f(\Delta) \cdot 2 \cdot V\left(\frac{\Delta}{2}\right)}{2 \cdot U\left(\frac{\Delta}{2}\right)} \quad f(\Delta) := \frac{y_2 - \frac{y_1 \cdot 2 \cdot U(\Delta)}{2 \cdot U\left(\frac{\Delta}{2}\right)}}{2 \cdot V(\Delta) - \frac{2 \cdot V\left(\frac{\Delta}{2}\right) \cdot 2 \cdot U(\Delta)}{2 \cdot U\left(\frac{\Delta}{2}\right)}}$$

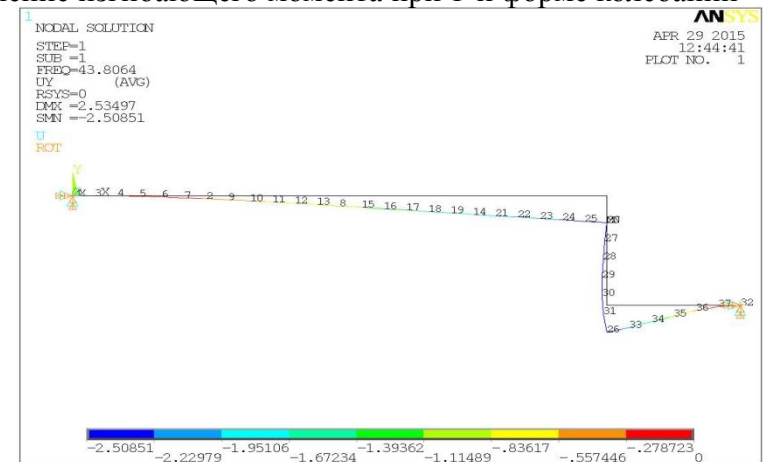
$$F1(d) := e(d) \cdot 2 \cdot T(d) + f(d) \cdot 2 \cdot U(d) - \Theta_2$$



1-я форма колебаний балки при неизвестной безразмерной частоте.



Значение изгибающего момента при 1-й форме колебаний



Форма колебаний балки на 1-й частоте, полученная решением ANSYS Inc.

$$y_1 = -3.9165 \times 10^{-3} \text{ м}$$

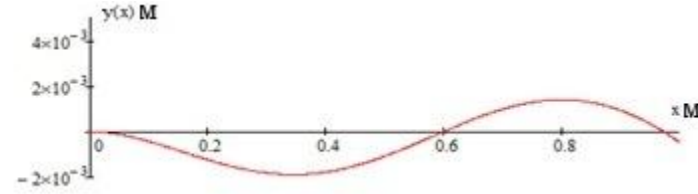
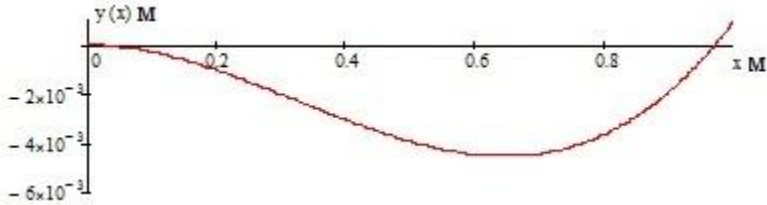
$$y_2 = 0.94116 \times 10^{-3} \text{ м}$$

$$\Theta_2 = 25.934 \times 10^{-3} \text{ м}$$

$$y_1 = -1.0645 \times 10^{-3} \text{ м}$$

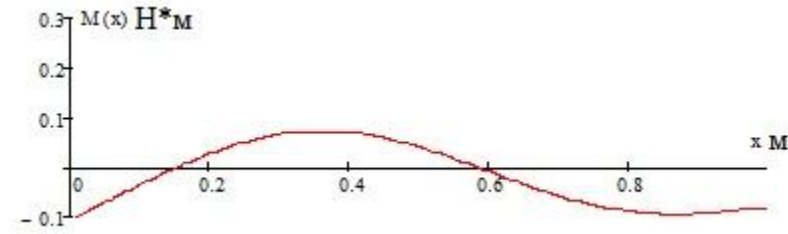
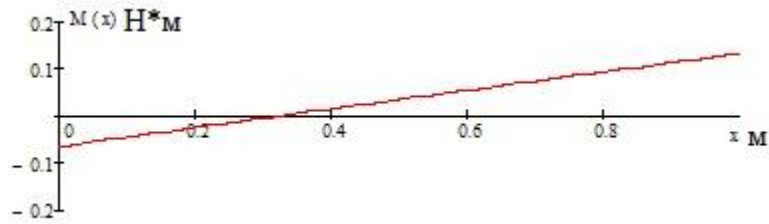
$$y_2 = -0.47122 \times 10^{-3} \text{ м}$$

$$\Theta_2 = -30.398 \times 10^{-3} \text{ м}$$



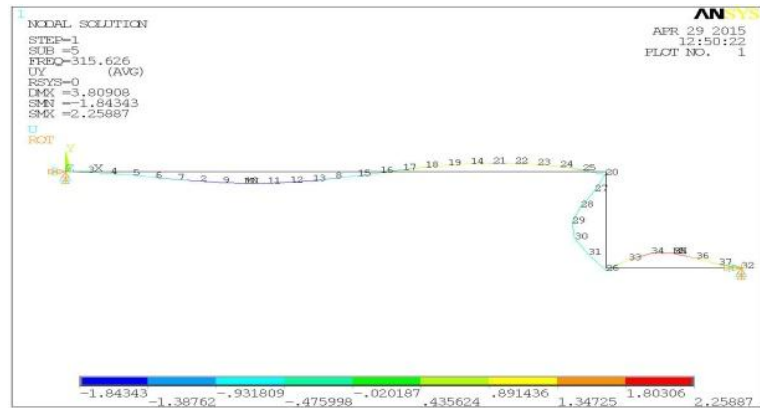
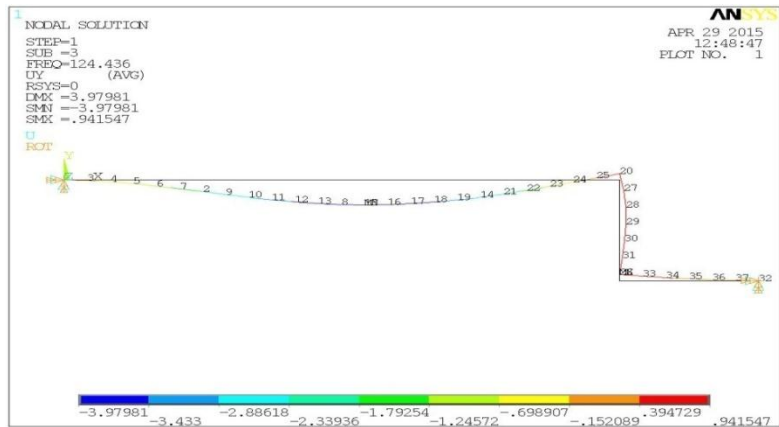
2-я форма колебаний балки при неизвестной безразмерной частоте.

3-я форма колебаний балки при неизвестной безразмерной частоте.



Значение изгибающего момента при 2-й форме колебаний

Значение изгибающего момента при 3-й форме колебаний



Форма колебаний балки на 2-й частоте, полученная решением ANSYS Inc.

Форма колебаний балки на 3-й частоте, полученная решением ANSYS Inc.

# Нахождение неизвестных параметров стержня

Известно:  $\Delta$ ,  $\omega$ ,  $l$ ,  $E$ ,  $\rho$ ,  $R$

Найти:  $r$

$$\Delta = \frac{l^2 \omega}{\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}}$$

$$\frac{J}{F} = \left( \frac{\omega \cdot l^2}{\Delta^2} \right)^2 \cdot \frac{\rho}{E}$$

$$J = \frac{\pi \cdot ((2 \cdot R)^4 - (2 \cdot r)^4)}{64}$$

$$F = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

$$r = \sqrt{4 \cdot \left( \left( \frac{\omega \cdot l^2}{\Delta^2} \right)^2 \cdot \frac{\rho}{E} \right) - R^2}$$

# Результаты работы

## **Лабораторная работа №1. Оценка динамической жесткости опоры.**

Известные величины:  $E, J, \rho, l, F$

Параметры определяемые из эксперимента:  $\omega, y_1, y_2, \theta_2$

Величины определяемые в ходе работы:  $K_y, K_\phi,$

## **Лабораторная работа №2. Оценка динамических напряжений.**

Известные величины:  $E, J, \rho, l, F$

Параметры определяемые из эксперимента:  $\omega, y_1, y_2, \theta_2$

Величины определяемые в ходе работы:  $\sigma$

## **Лабораторная работа №3. Определение неизвестных параметров стержня.**

Известные величины:  $E, \rho, l, D$

Параметры определяемые из эксперимента:  $\omega, y_1, y_2, \theta_2$

Величины определяемые в ходе работы:  $d$