

Выпускная квалификационная работа

В.М. Седов

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ РЕГЕНЕРАЦИИ КОСТНОЙ ТКАНИ
ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ**

Руководитель: д.ф.-м.н. Л.Б.Маслов

Ивановский государственный энергетический университет
Кафедра теоретической и прикладной механики



Цели работы

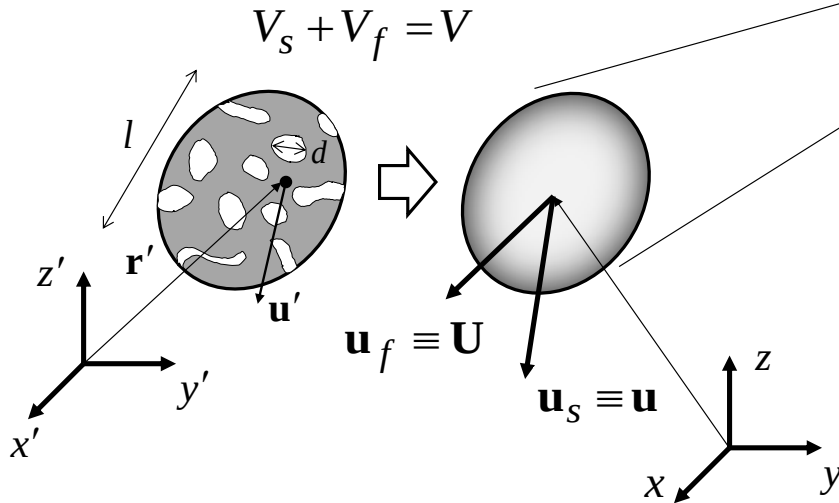
- Исследование влияния механического воздействия гармонического характера на процесс регенерации кости в зоне перелома методами математического моделирования.

Задачи решаемые в работе

- Обзор теоретических подходов к решению задачи регенерации.
- Математический анализ одномерной модели структурной перестройки костной ткани.
- Разработка и анализ трёхмерной модели регенерации кости.
- Проведение вычислительных экспериментов с использованием трёхмерной модели.

Пороупругая модель костной ткани

Двухфазная сплошная среда



Определяющие соотношения пороупругой среды в «u-p» переменных

$$\sigma(\mathbf{u}, p) = \sigma_{dr}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}p \equiv \mathbf{C}_{dr} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}p$$

$$\zeta(\mathbf{u}, p) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \phi^2 R^{-1} p$$

Конечно-элементные уравнения колебаний пороупругого тела

Уравнения динамики пороупругой среды в «u-p» переменных

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{dr} - s^2 (\rho \mathbf{E} - \rho_f \tilde{\Gamma}(s)) \cdot \hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{A} - \tilde{\Gamma}(s)) \cdot \nabla \hat{p} = -\hat{\mathbf{f}}_V$$

$$s^{-1} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{K}}(s) \cdot \nabla \hat{p}) - \phi^2 R^{-1} \hat{p} - (\mathbf{A} - \tilde{\Gamma}(s)) \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$$

$$s = i\omega$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{dr} - \omega^2 (\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{L}}(i\omega))) \mathbf{U} - (\mathbf{H}_1 + \tilde{\mathbf{H}}_2(i\omega)) \mathbf{P} &= \mathbf{F} \\ (\mathbf{H}_1 + \tilde{\mathbf{H}}_2(i\omega))^T \mathbf{U} + (-\mathbf{D} + i\omega^{-1} \tilde{\mathbf{G}}(i\omega)) \mathbf{P} &= -i\omega^{-1} \mathbf{Q}^* \end{aligned}$$

Алгоритм образования нового фенотипа

Механо-регулирующий индекс

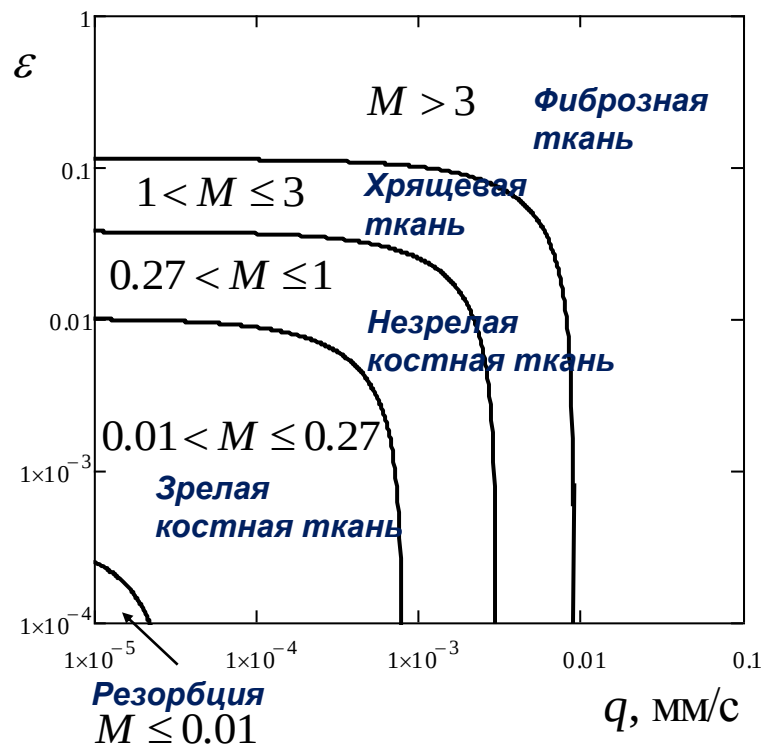
$$M = \frac{\varepsilon}{a} + \frac{q}{b}$$

$$a = 0.0375, \quad b = 3 \text{ мкм} / \text{с}$$

Уравнения диффузии клеток

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(J \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

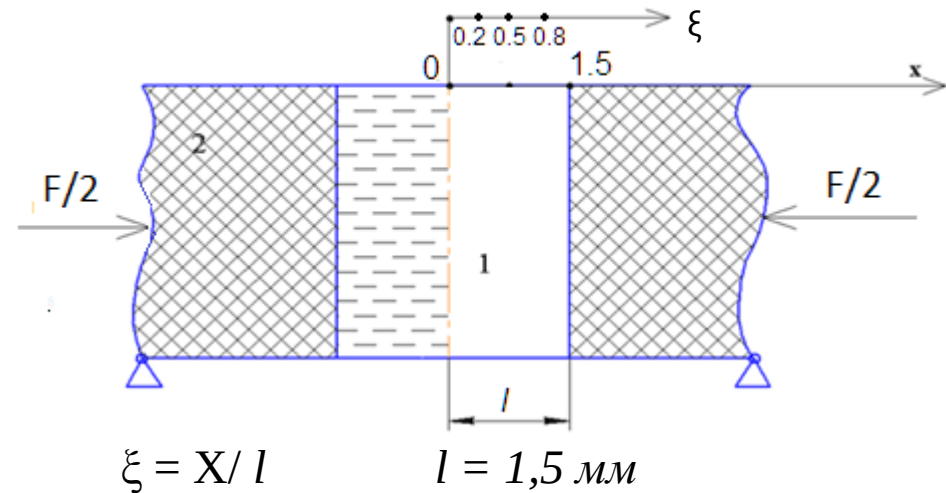
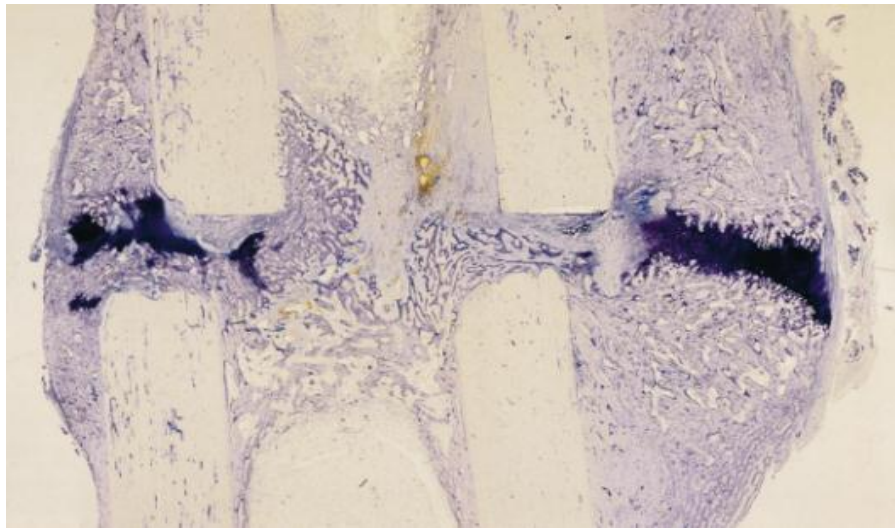
$$J = 0,06 \frac{\text{мм}}{\text{день}} \text{ коэффициент диффузии клеток}$$



Пороупругие
характеристики
основных
фенотипов
перестраивающейся
ткани

Тип ткани	ϕ	α	ρ , кг/м ³	$E^{(dr)}$, Па	$G^{(dr)}$, Па	R , Па	K , м ⁴ /Н·с
Гранулированная	0,99	1,000	1021	$1,36 \cdot 10^5$	$0,57 \cdot 10^5$	$2,29 \cdot 10^9$	$1,0 \cdot 10^{-14}$
Фиброзная	0,80	0,990	1100	$1,15 \cdot 10^6$	$0,47 \cdot 10^6$	$0,21 \cdot 10^9$	$1,0 \cdot 10^{-14}$
Хрящевая	0,80	0,995	1120	$5,82 \cdot 10^6$	$2,35 \cdot 10^6$	$1,07 \cdot 10^9$	$5,0 \cdot 10^{-15}$
Незрелая кость	0,65	0,893	1182	$3,73 \cdot 10^9$	$0,97 \cdot 10^9$	$1,42 \cdot 10^9$	$1,0 \cdot 10^{-13}$
Зрелая кость	0,20	0,435	1416	$1,31 \cdot 10^{10}$	$0,45 \cdot 10^{10}$	$0,39 \cdot 10^9$	$3,7 \cdot 10^{-13}$
Компактное вещество кости	0,10	0,367	1468	$2,11 \cdot 10^{10}$	$0,63 \cdot 10^{10}$	$0,19 \cdot 10^9$	$1,0 \cdot 10^{-17}$

Одномерная модель структурной перестройки



1 – область структурной перестройки (регенерации)

2 – здоровая кость

ξ – масштабированная ось координат

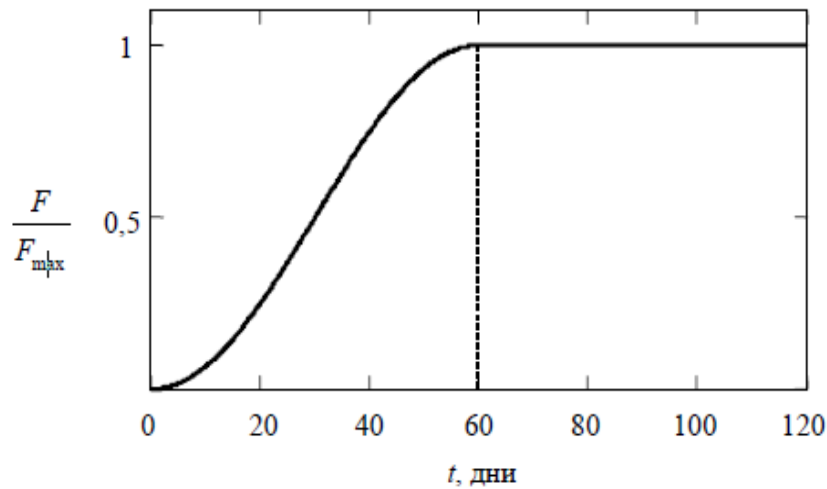


График зависимости величины статической нагрузки F от времени t

$$F(t, \omega) = F_{sta}(t) + F_{dyn}(t)e^{i\omega\tau}$$

$$F_{dyn} = kF_{sta}$$

t – время (дни), F_{sta} – статическое нагружение (Н),
 F_{dyn} – динамическая составляющая нагрузки (Н),
 k – коэффициент (%), ω – частота динамической нагрузки, $F_{max} = 500 \text{ Н}$

Динамика изменения модуля упругости (Модуль Юнга)

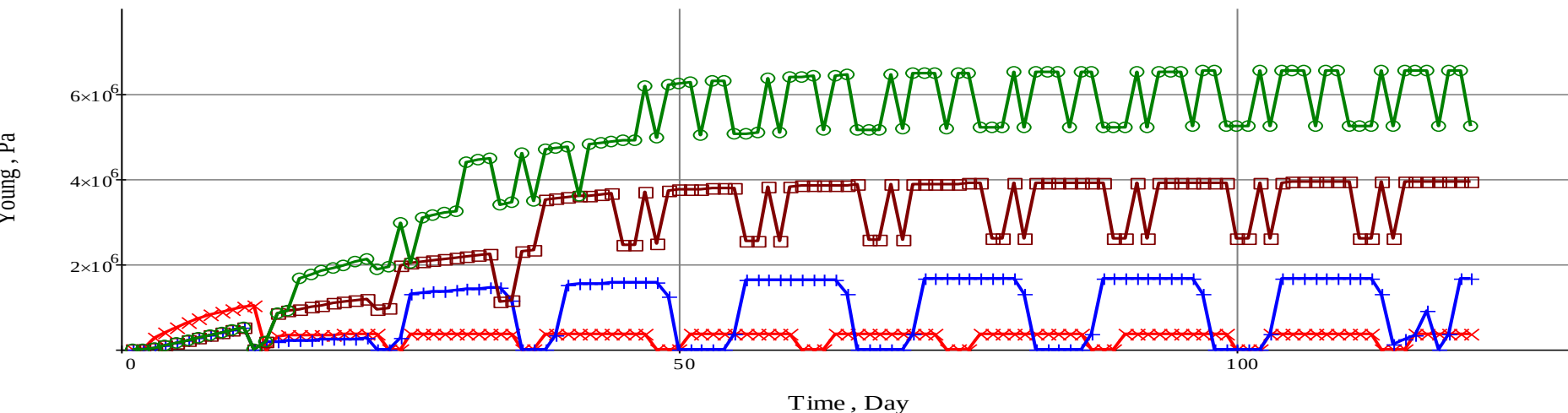


График зависимости величины модуля Юнга (Па) от времени (день) в точке 0.2l

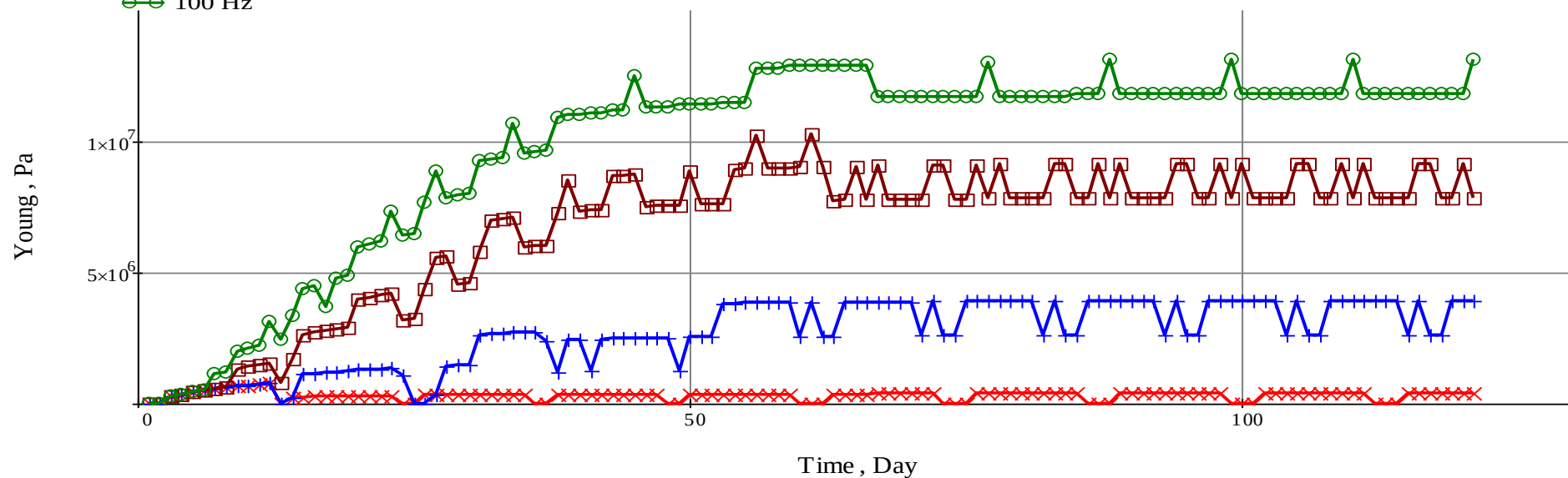


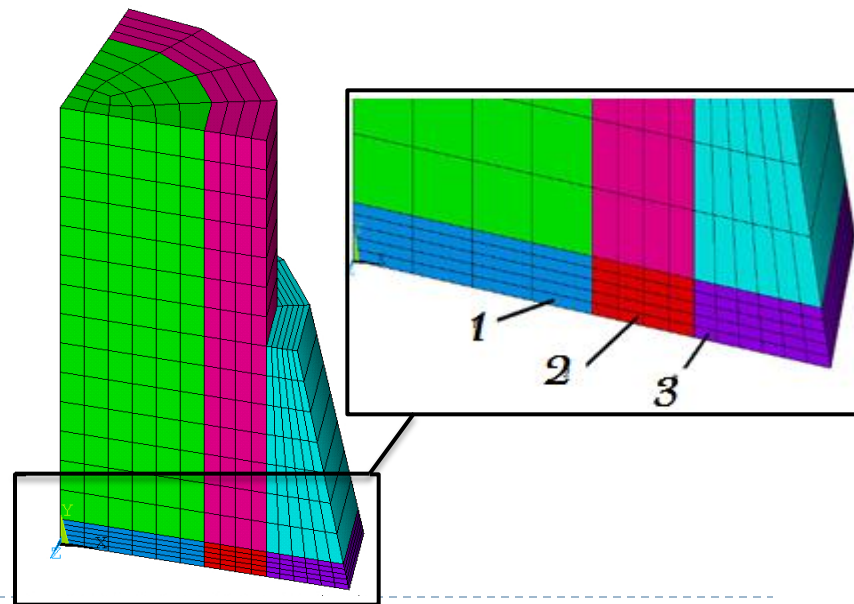
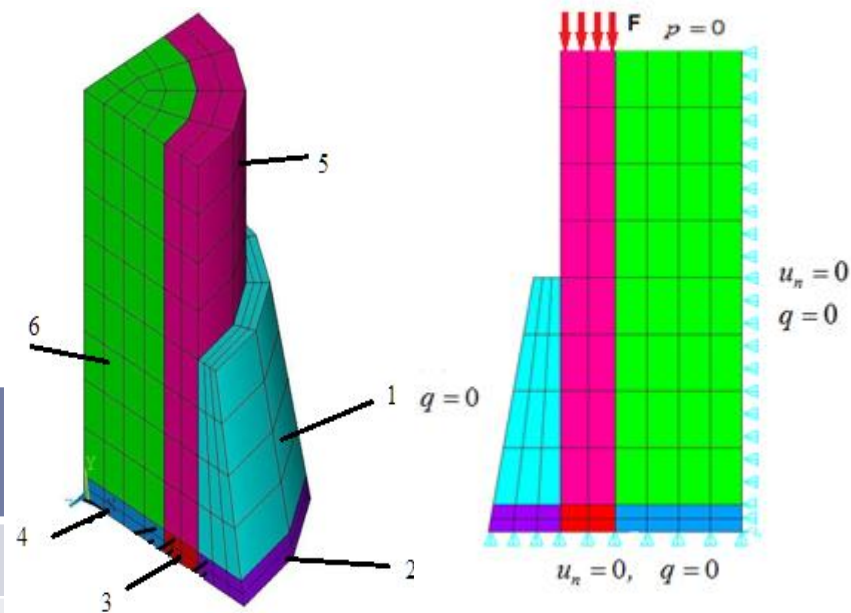
График зависимости величины модуля Юнга (Па) от времени (день) в точке 0.5l

Трёхмерная модель регенерации костной ткани в зоне перелома при аналитической постановке задачи диффузии клеток

Методика нормирования коэффициента k

$$F_{dyn} = \frac{1}{\omega^2} \quad \frac{F_{dyn 1}}{F_{dyn 10}} = \frac{k_1 F_{sta}}{k_2 F_{sta}} = \frac{\omega_{10}^2}{\omega_1^2}$$

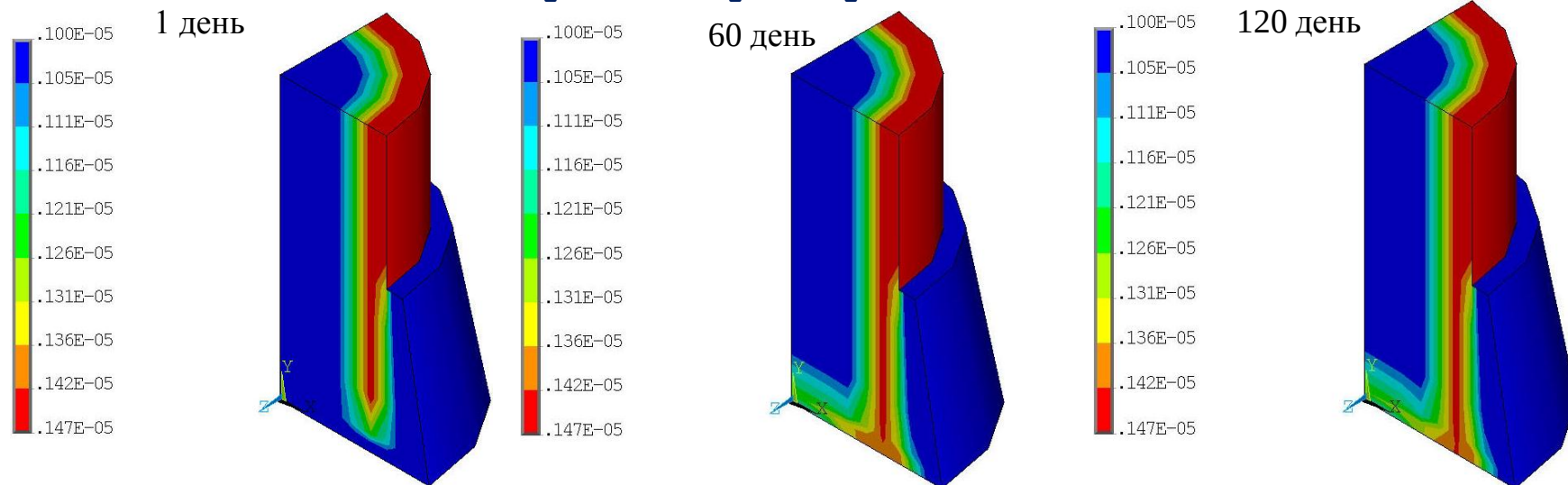
	1 Hz	10 Hz	50 Hz	100 Hz
k ненорм (%)	10	10	10	10
k норм (%)	10	0.1	4e-3	1e-3
Величина амплитуды гармонической силы после нормировки (Н)	50	0.5	2e-3	5e-4



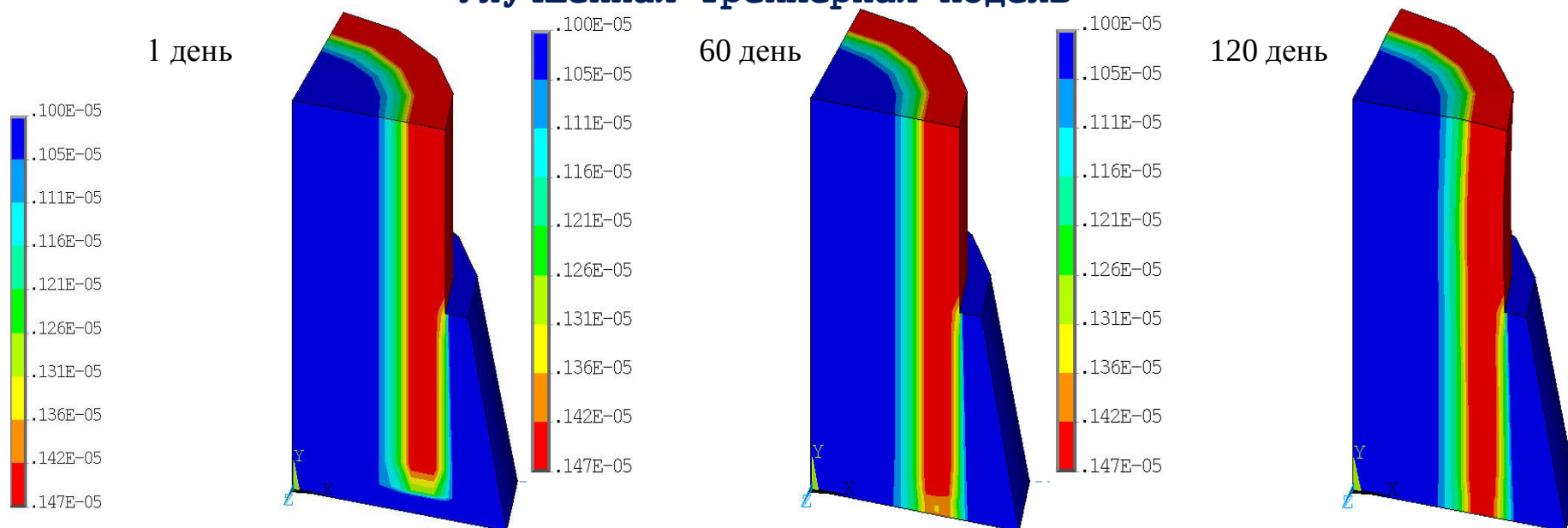
Динамика изменения плотности в области костной мозоли

Частота нагрузки 10 Гц, коэффициент динамической составляющей 10%

«Грубая» трёхмерная модель

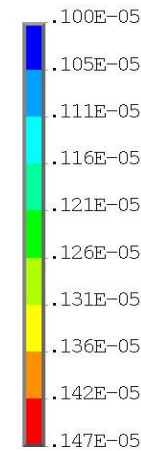
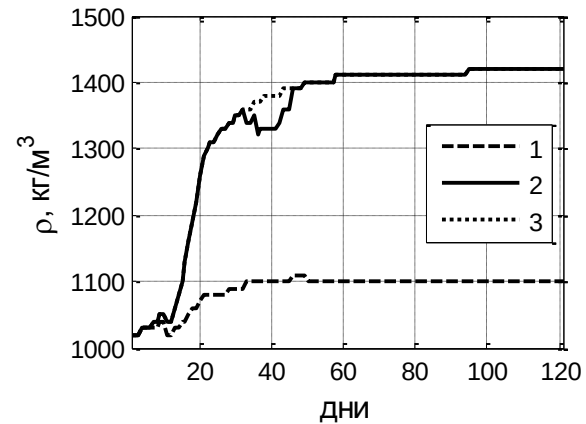
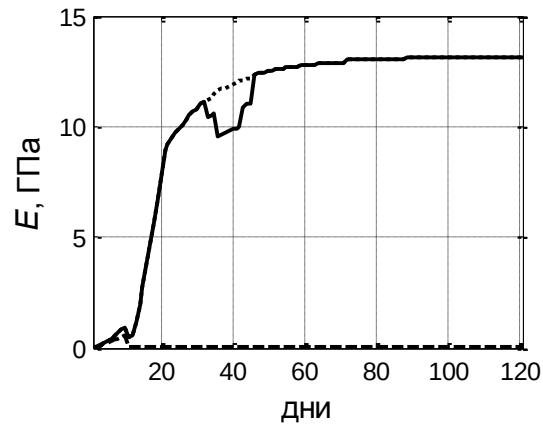


Улучшенная трёхмерная модель

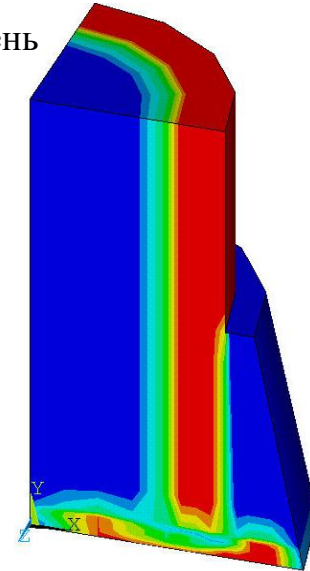


Динамика изменения модуля Юнга и плотности в области костной мозоли

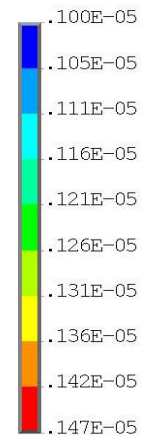
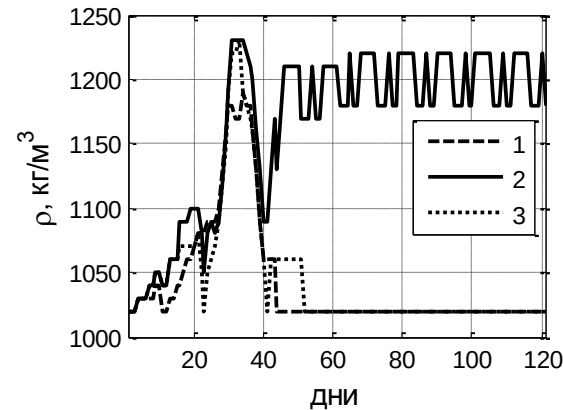
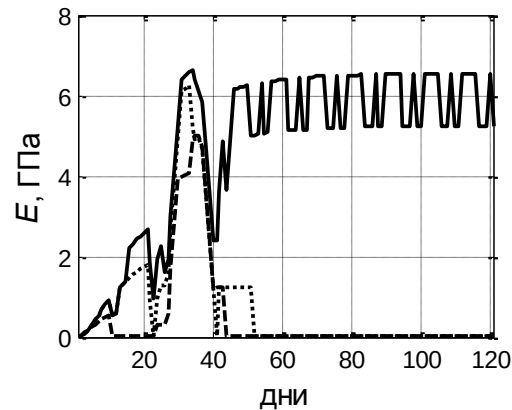
Частота нагрузки 10 Гц, коэффициент динамической составляющей 0,1%



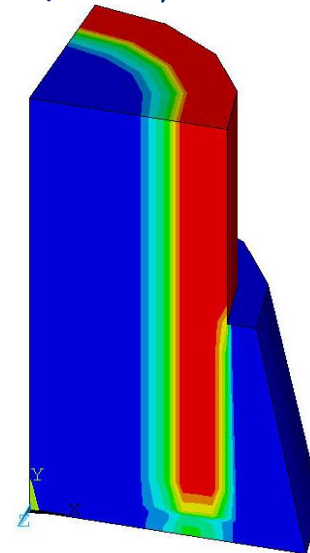
120 день



Частота нагрузки 50 Гц, коэффициент динамической составляющей 0,004%



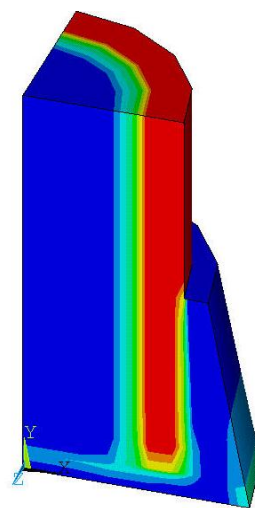
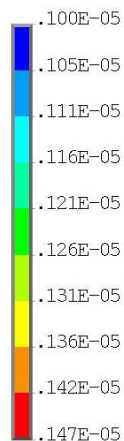
120 день



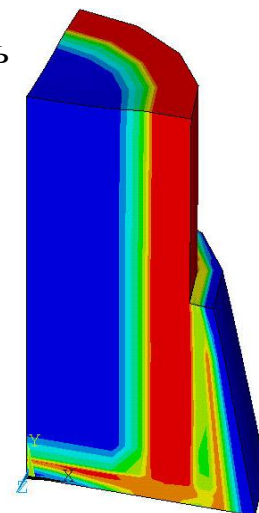
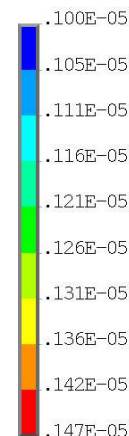
Численная постановка задачи диффузии клеток и результаты экспериментов в данной постановке

Частота нагрузки 10 Гц, коэффициент динамической составляющей 10%

5 день

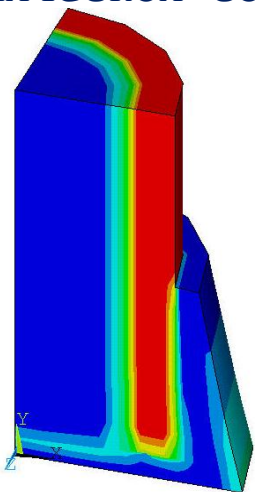
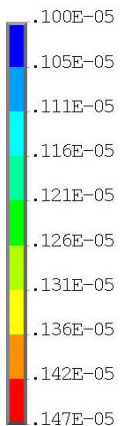


120 день

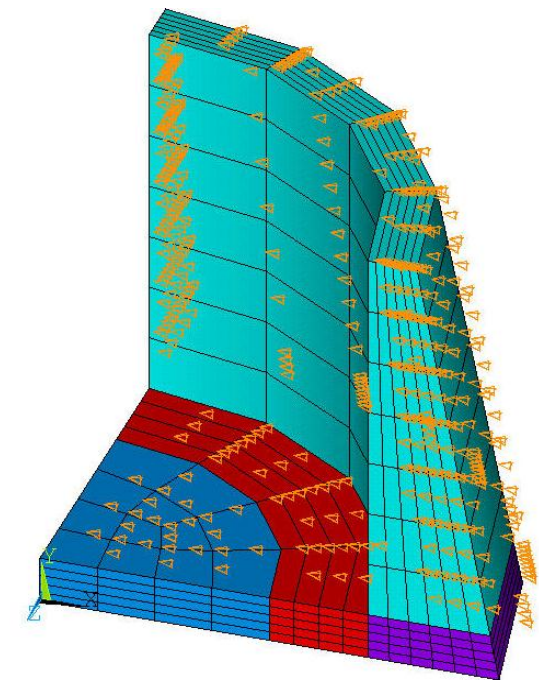
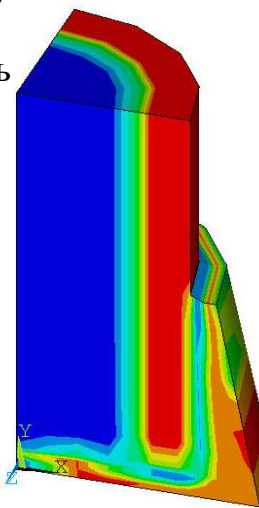
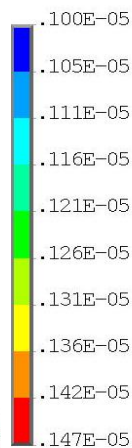


Частота нагрузки 10 Гц, коэффициент динамической составляющей 0,1%

5 день



120 день



Дополнительные граничные условия приложенные к модели

Результаты

- ❑ В рамках данной работы было исследовано влияние механического воздействия гармонического характера на процесс регенерации костной ткани.
- ❑ Была разработана трёхмерная конечно-элементная модель структурной перестройки костной ткани.
- ❑ Решены аналитическая и численная задача диффузии клеток в трёхмерной постановке.

Перспективы развития

Планируется улучшение данной модели при помощи рассмотрения воздействия мышечной ткани на процесс регенерации.

