

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ивановский государственный энергетический университет имени В. И. Ленина»

Кафедра теоретической и прикладной механики

Исследование изгибных колебаний пластины с учетом продольных сил

ВЫПОЛНИЛА: СТУДЕНТКА ГРУППЫ 4 – 33
КИСЕЛЕВА А. И.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: К. Т. Н., ДОЦЕНТ
НОЗДРИН М. А.

Иваново 2020

Цель

Исследование влияния продольных сил на изгибные колебания пластины.

Задачи

- Выполнение аналитических расчётов для исследовательской задачи с использованием средств программной среды MATHCAD;
- Проведение уточняющих расчётов и корректировка расчётной модели конструкции;
- Выполнение численных расчётов методом конечно – элементного моделирования в программном комплексе ANSYS WORKBENCH;
- Сравнение полученных результатов аналитического и численного расчётов.

Постановка задачи

3

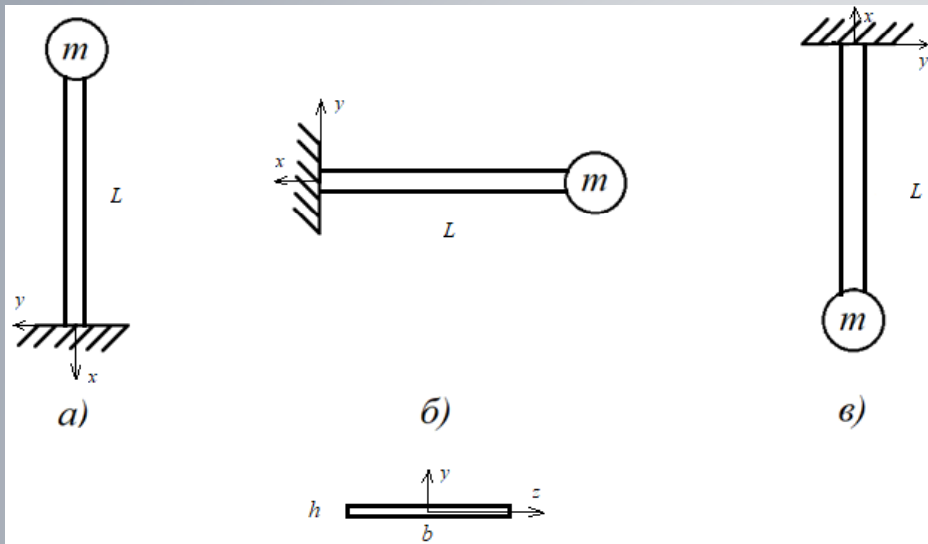


Рис. 1. Расчётные модели конструкции: а) сжимающая продольная сила, б) отсутствие продольных сил, в) растягивающая продольная сила

$$\text{момент инерции: } I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,03 \cdot 0,002^3}{12} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3;$$

$$\text{масса пластины: } M = \rho \cdot b \cdot h \cdot L = 7800 \cdot 0,03 \cdot 0,002 \cdot 0,3 = 0,141 \text{ кг};$$

$$\text{распределенная масса: } \mu = \frac{M}{L} = \frac{0,14}{0,3} = 0,471 \text{ кг/м};$$

$$\text{продольная сила: } N = m \cdot g = 0,1 \cdot 9,81 = 0,981 \text{ Н};$$

$$\text{критическая сжимающая сила: } P_3 = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-11}}{0,3^2} = 438,649 \text{ Н}.$$

Исходные данные:

материал конструкции – сталь;

модуль Юнга: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па;

плотность: $\rho = 7850$ кг/м³;

габариты пластины:

длина: $L = 0,3$ м;

ширина: $b = 0,03$ м;

толщина: $h = 0,002$ м;

масса груза: $m = 0,1$ кг;

Аналитический расчет

Отсутствие продольных сил

4

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M; \quad (1)$$

$$q = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = q \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = q \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (6)$$

$$y = X(x) \cdot T(t) \quad (7)$$

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx, \quad (8)$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}} \quad (9)$$

Аналитический расчет

Отсутствие продольных сил

Функции Крылова

$$X = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V, \quad (10)$$

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kx + \cos kx); \\ T = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} kx + \sin kx); \\ U = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kx - \cos kx); \\ V = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} kx - \sin kx), \end{cases}$$

(1)

$$\begin{cases} S = \frac{1}{k} T'; \\ T = \frac{1}{k} U'; \\ U = \frac{1}{k} V'; \\ V = \frac{1}{k} S'. \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} X' = k(C_1 V + C_2 S + C_3 T + C_4 U); \\ X'' = k^2(C_1 U + C_2 V + C_3 S + C_4 T); \\ X''' = k^3(C_1 T + C_2 U + C_3 V + C_4 S). \end{cases} \quad (3)$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (11)$$

Аналитический расчет

Действие продольных сил

6

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{N}{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{EI}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

$$(11) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{N}{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{EI}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (17)$$

$$X^{IV} + \alpha^2 X'' - K^4 X = 0,$$

$$(12) \quad X^{IV} - \alpha^2 X'' - K^4 X = 0 \quad (18)$$

$$X = C_1 \operatorname{sh} s_1 x + C_2 \operatorname{ch} s_1 x + C_3 \sin s_2 x + C_4 \cos s_2 x \quad (14) \quad X = C_1 \operatorname{sh} s_2 x + C_2 \operatorname{ch} s_2 x + C_3 \sin s_1 x + C_4 \cos s_1 x \quad (19)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (13) \quad s_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + K^4}}; \quad (15) \quad s_2 = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + K^4}} \quad (16)$$

$$P_3 = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (20) \quad p = p_0 \sqrt{1 - \frac{P}{P_3}}, \quad (21) \quad p = p_0 \sqrt{1 + \frac{P}{P_3}}, \quad (22)$$

Граничные условия

Отсутствие продольных сил

Основной расчет

Защемлённый конец пластины ($x = 0$):

$$X = 0 \rightarrow C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$X' = 0 \rightarrow k \cdot (C_1 V + C_2 S + C_3 T + C_4 U) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Конец пластины с сосредоточенной массой ($x = L$):

$$X'' = 0 \rightarrow k^2 \cdot (C_1 U + C_2 V + C_3 S + C_4 T) = 0 \rightarrow$$

$$k^2 \cdot (C_3 S + C_4 T) = 0$$

$$EI \cdot X''' + mp^2 \cdot X = 0 \rightarrow$$

$$EIk^3(C_1 T + C_2 U + C_3 V + C_4 S) + mp^2(C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V) = 0 \rightarrow$$

$$EIk^3(C_3 V + C_4 S) + mp^2(C_3 U + C_4 V)$$

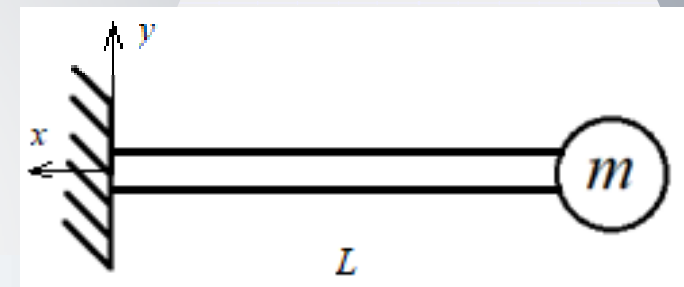


Рис. 2. Расчётная модель конструкции для случая отсутствия продольных сил (груз на конце пластины)

Расчет в Mathcad

Отсутствие продольных сил

Основной расчет

$$S(p) := \frac{1}{2}(\cosh(k(p) \cdot L) + \cos(k(p) \cdot L))$$

$$T(p) := \frac{1}{2}(\sinh(k(p) \cdot L) + \sin(k(p) \cdot L))$$

$$U(p) := \frac{1}{2}(\cosh(k(p) \cdot L) - \cos(k(p) \cdot L))$$

$$V(p) := \frac{1}{2}(\sinh(k(p) \cdot L) - \sin(k(p) \cdot L))$$

$$W(p) := \begin{vmatrix} a11(p) & a12(p) \\ a21(p) & a22(p) \end{vmatrix}$$

$$a11(p) := k(p)^2 \cdot S(p)$$

$$a21(p) := E \cdot I \cdot k(p)^3 \cdot V(p) + m \cdot p^2 \cdot U(p)$$

$$a12(p) := k(p)^2 \cdot T(p)$$

$$a22(p) := E \cdot I \cdot k(p)^3 \cdot S(p) + m \cdot p^2 \cdot V(p)$$

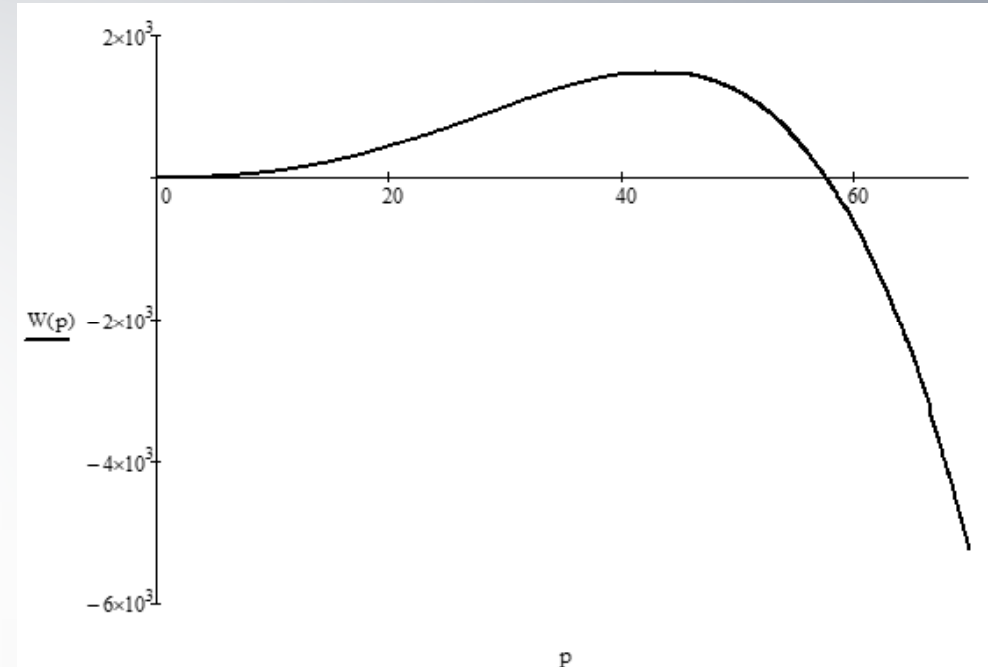


Рис. 3. график решения частотного уравнения для случая отсутствия продольных сил (груз на конце пластины)

$$p := 57.68$$

$$p2 := 57.688$$

$$p2 := \text{root}(W(p), p)$$

$$f2 := \frac{p2^2}{2 \cdot \pi} = 9.181$$

Граничные условия

Отсутствие продольных сил

Дополнительный расчет

9

Защемлённый конец пластины ($x_1 = 0$):

$$X_1 = 0 \rightarrow C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = 0 \rightarrow k \cdot (C_1 V + C_2 S + C_3 T + C_4 U) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Сосредоточенная масса на пластине ($x_1 = \frac{1}{2}L, x_2 = 0$):

$$X_1 = X_2 \rightarrow C_3 U + C_4 V = C_5$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \rightarrow k \cdot (C_3 T + C_4 U) = k \cdot C_6$$

$$EI \cdot \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_1^2} = EI \cdot \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_2^2} \rightarrow k^2 \cdot (C_3 S + C_4 T) = k^2 \cdot C_7$$

$$EI \cdot \frac{\partial^3 X_1}{\partial x_1^3} = EI \cdot \frac{\partial^3 X_2}{\partial x_2^3} + \frac{\partial y_2}{\partial t} \rightarrow$$

$$EIk^3 \cdot (C_3 V + C_4 S) = EIk^3 \cdot C_8 - mp^2 \cdot C_5$$

Свободный конец пластины ($x_2 = L$):

$$EI \cdot \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_2^2} = 0 \rightarrow k^2 \cdot (C_5 U + C_6 V + C_7 S + C_8 T) = 0$$

$$EI \cdot \frac{\partial^3 X_2}{\partial x_2^3} = 0 \rightarrow k^3 \cdot (C_5 T + C_6 U + C_7 V + C_8 S) = 0$$

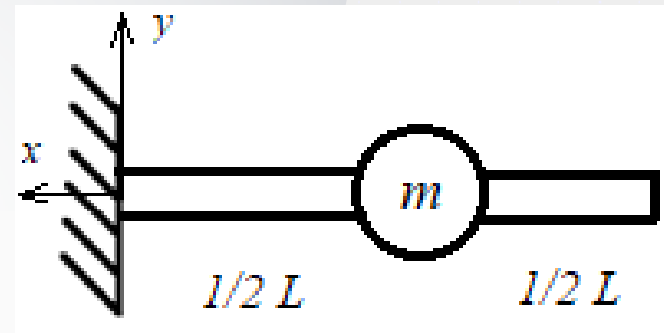


Рис. 4. Расчётная модель конструкции для случая отсутствия продольных сил (груз на середине пластины)

Расчет в ANSYS Workbench

Граничные условия

10

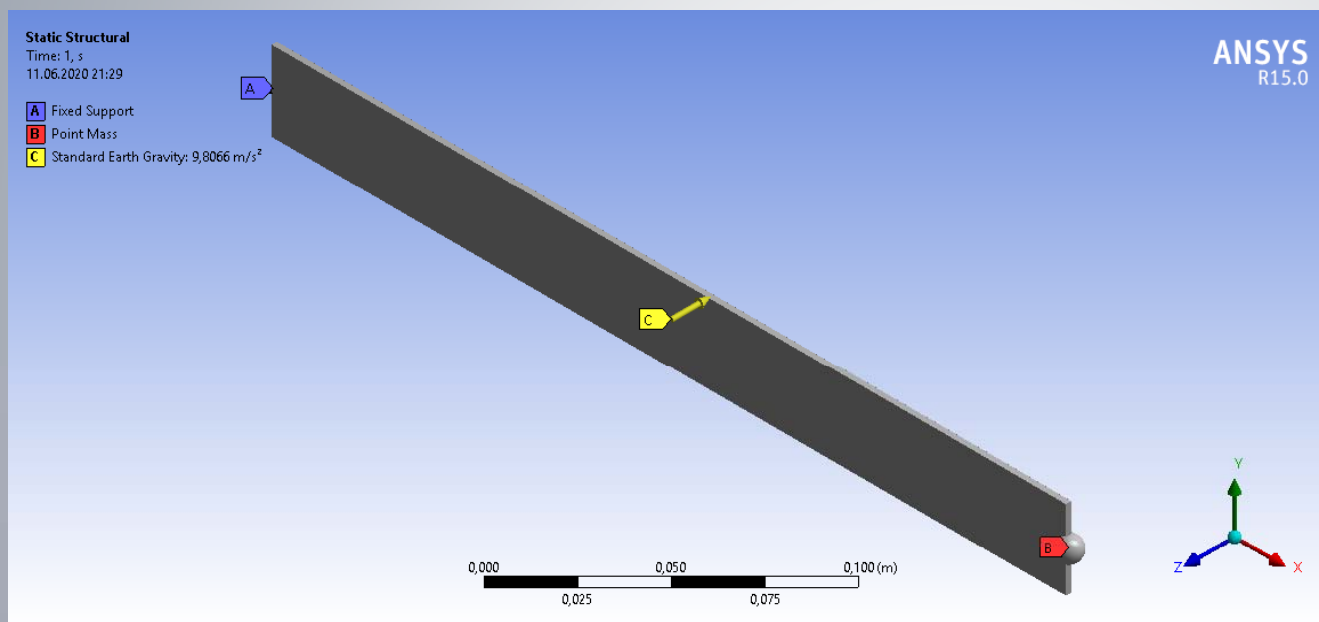
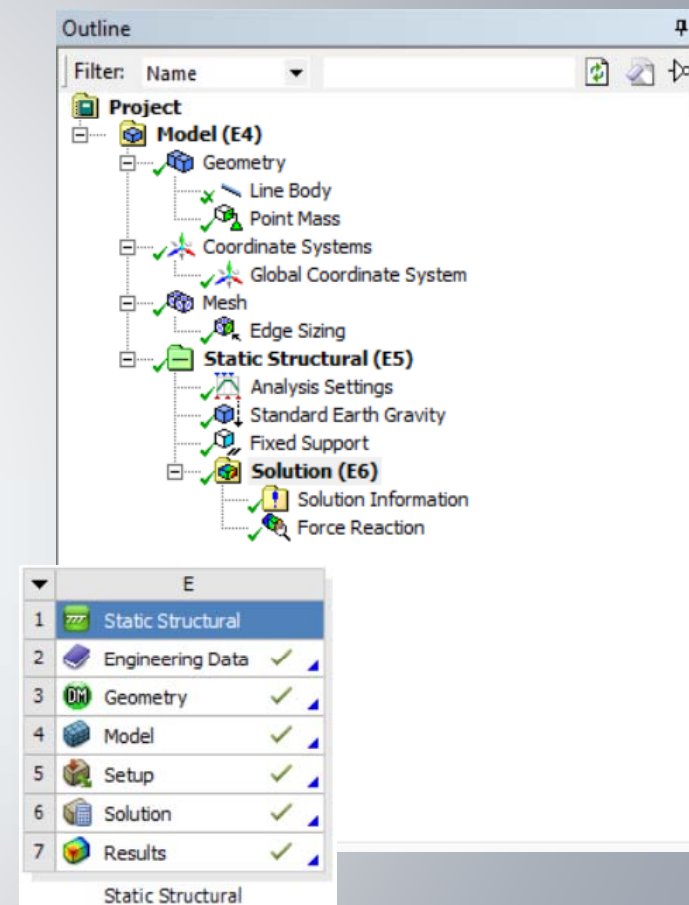


Рис. 5. Граничные условия для случая отсутствия продольных сил (груз на конце пластины)



Расчет в ANSYS Workbench

КЭ модель

11

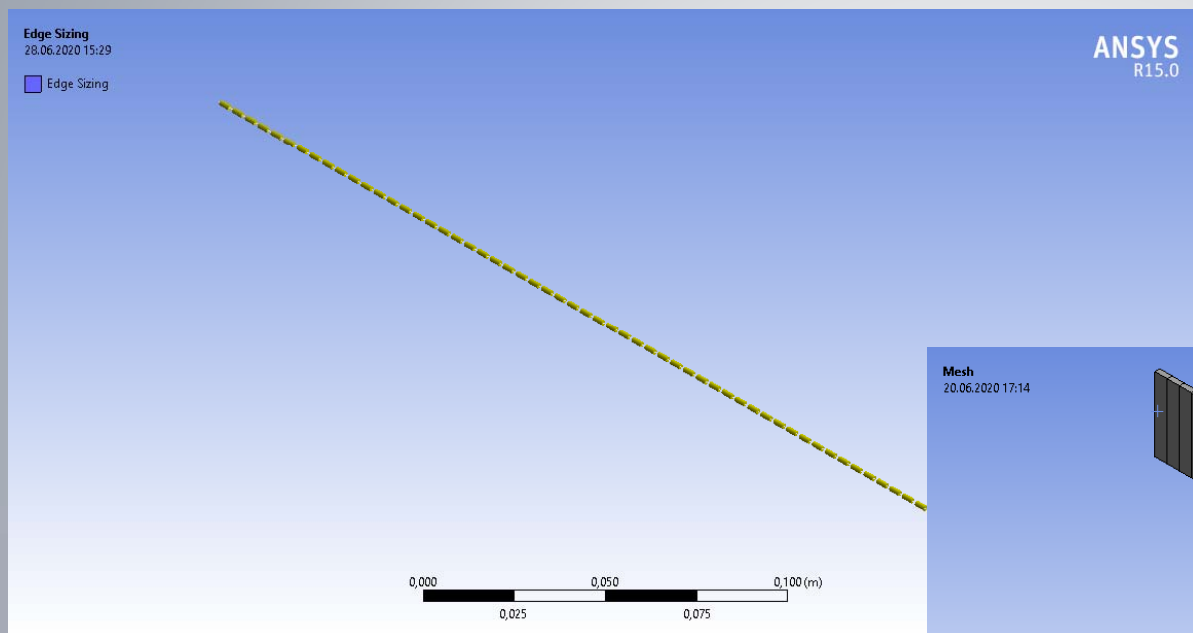


Рис. 6. Конечно – элементная модель для случая отсутствия продольных сил (груз на конце пластины)

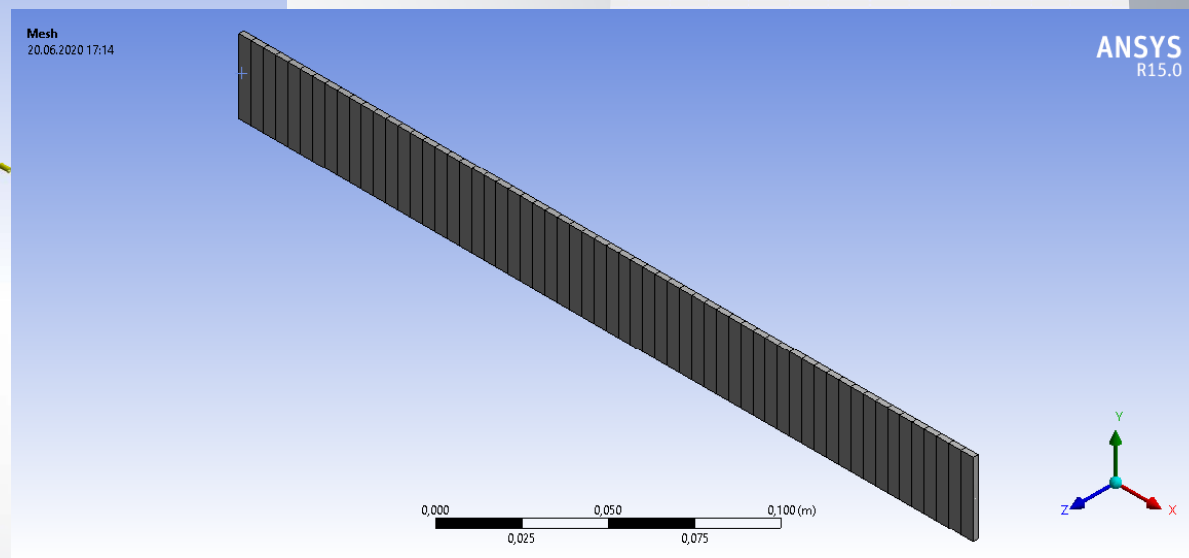


Рис. 7. Сетка для случая отсутствия продольных сил (груз на конце пластины)

Расчет в ANSYS Workbench

Вывод результатов

12

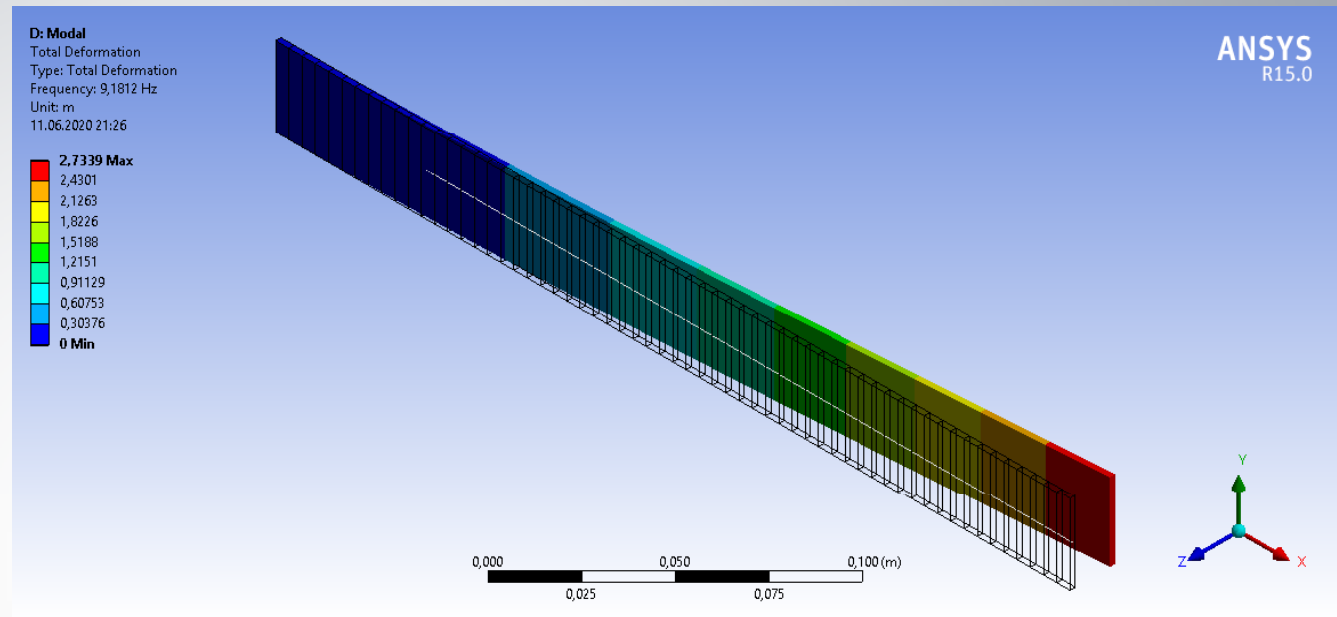
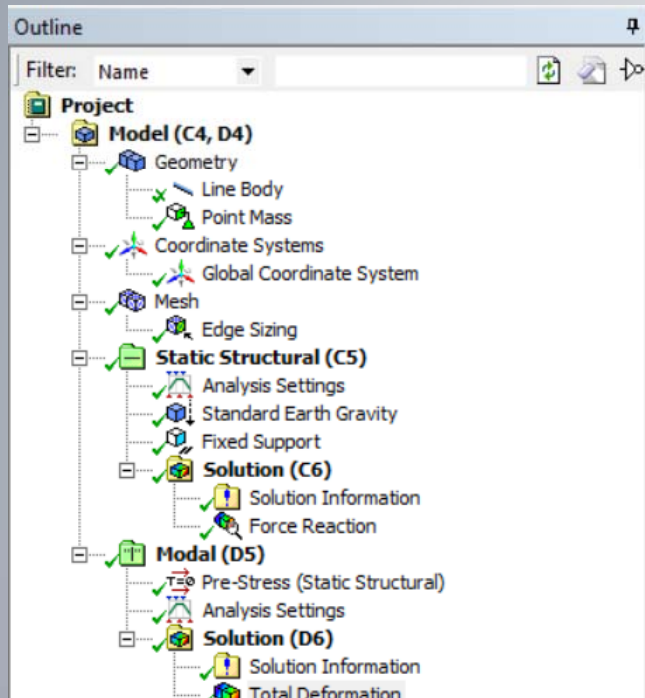
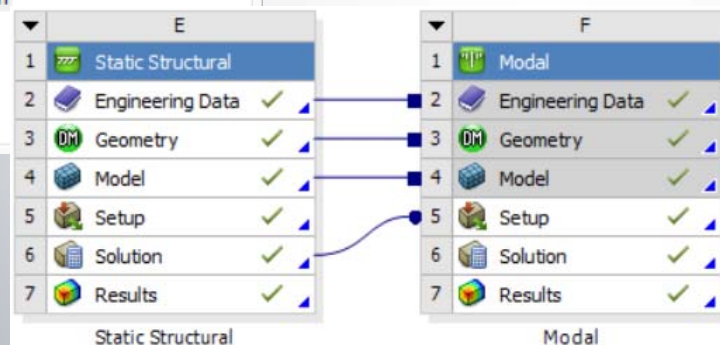


Рис. 8. Первая форма собственных колебаний для случая отсутствия продольных сил (груз на конце пластины)



Результаты расчетов

13

Таблица 1. Сравнение результатов расчётов

	MATHCAD		ANSYS WORKBENCH	
	l=L	$l = \frac{1}{2}L$	l=L	$l = \frac{1}{2}L$
Без продольной силы Гц	9,181	15,676	9,181	15,273
С учетом сжимающей продольной силы Гц	9,172 (9,171)	15,665 (15,658)	9,123	15,198
С учетом растягивающей продольной силы Гц	9,191 (9,191)	16,111 (15,694)	9,239	15,348

$$\delta_1 = \frac{9,181 - 9,181}{9,181} \cdot 100\% = 0\%$$

$$\delta_2 = \frac{9,123 - 9,172}{9,172} \cdot 100\% = 0,53\%$$

$$\delta_3 = \frac{9,239 - 9,191}{9,191} \cdot 100\% = 0,52\%$$

$$\delta_4 = \frac{15,273 - 15,676}{15,676} \cdot 100\% = 2,57\%$$

$$\delta_5 = \frac{15,198 - 15,665}{15,665} \cdot 100\% = 2,98\%$$

$$\delta_6 = \frac{15,348 - 16,111}{16,111} \cdot 100\% = 4,74\%$$

Выводы

14

- Разработана расчётная модель задачи исследования изгибных колебаний пластины с учётом действия продольных сил;
- С использованием средств программной среды MATHCAD выполнены аналитические расчёты для случаев, когда пластина не испытывает действия продольных сил, когда на пластину действует сжимающая продольная сила и случай растягивающей продольной силы;
- Также для всех расчётных случаев найдены численные решения в программном комплексе ANSYS WORKBENCH;
- Сравнительный анализ аналитического и численного расчётов показал, что максимальное расхождение составляет 4,47 %;
- Результаты работы рекомендованы к использованию в методических материалах к лабораторным занятиям по учебной дисциплине «Колебания упругих тел».