

Министерство науки и высшего образования России
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ивановский государственный энергетический университет
имени В.И. Ленина»

Кафедра теоретической и прикладной механики

**«Разработка учебного стенда для исследования
крутильных колебаний»**

Выполнил: студент гр. 4-33, Лазарев А.А.
Руководитель: к.т.н., доцент, Огурцов Ф.Б.

Цель работы

Проектирование модели лабораторного стенда для изучения изгибно-крутильных колебаний.

Задачи

1. Разработка конструкции.
2. Аналитический расчет модели с распределенными параметрами для кручения и для изгиба. Определение собственных частот и решение вопроса о оптимизации конструкции стенда.
3. Уточненный численный расчет собственных частот модели с распределенными параметрами.
4. Разработка схемы измерительной части стенда и методических указаний по проведению лабораторной работы.

Требования к проектированию лабораторного стенда

1. Конструкция стенда должна быть простой и хорошо моделироваться стержневой системой.
2. Модель в ANSYS должна допускать разбиение на малое число элементов.
3. Конструкция должна позволять исследовать и свободные, и вынужденные колебания. При этом возбуждение колебаний должно осуществляться бесконтактно.
4. Конструкция стенда должна допускать оперативное изменение параметров стенда, для работы 3-5 бригад.

Предварительное конструирование стенда

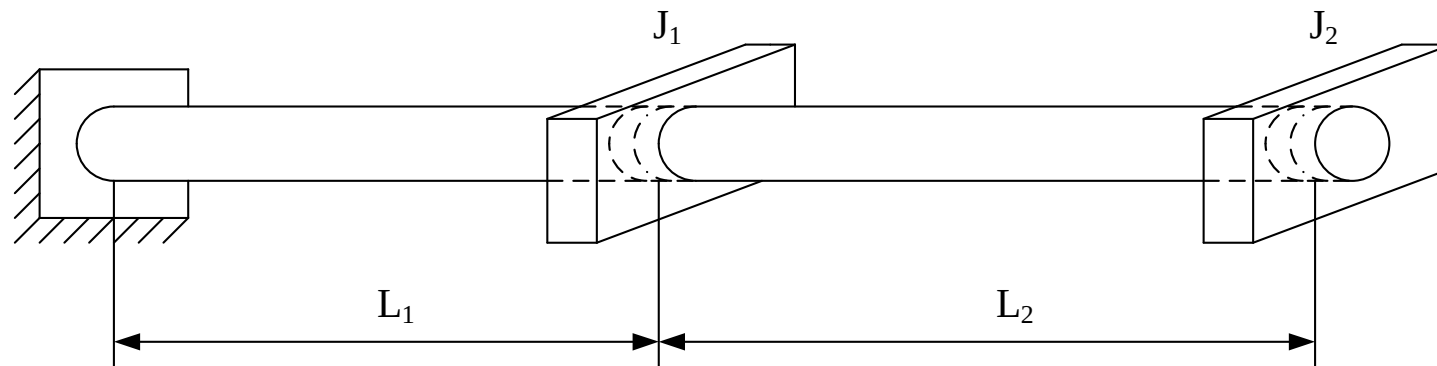


Рисунок 1 Схема конструкции

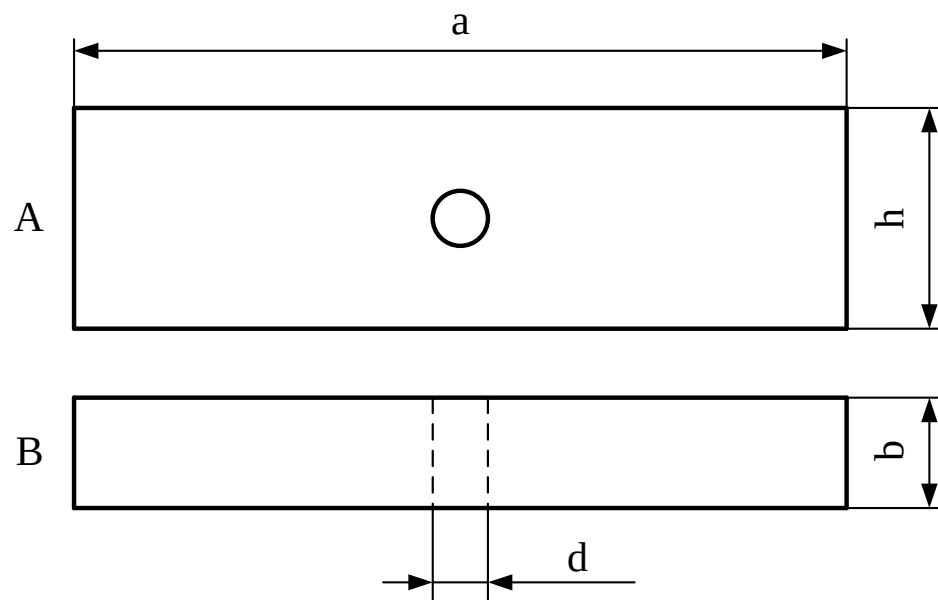


Рисунок 2 Геометрия инерционного элемента

(А – вид спереди; В – вид сверху)

$$J_0 = \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{h}{2}} (x^2 + y^2) dx dy - \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad (1)$$

$$J_{1,2} = J_0 \cdot b \cdot \rho = 0.00155 \text{ (м}^2 \cdot \text{кг)} \quad (2)$$

$$m_{\Pi} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \rho \approx 0.617 \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}}\right) \quad (3)$$

Начальные параметры конструкции

Таблица 1 – Начальные параметры геометрии

Параметр	Значение
Геометрия конструкции	
L_1 – длина первого участка	0.25 м
L_2 – длина второго участка	0.25 м
a – длина инерционного элемента	0.14 м
b – толщина инерционного элемента	0.02 м
h – высота инерционного элемента	0.04 м
d – диаметр сечения стержня	0.01 м
Физические свойства материала (сталь ст3)	
E – модуль упругости	$2 \cdot 10^{11}$ Па
G – модуль упругости II рода	$7.6923 \cdot 10^{10}$ Па
ρ – плотность	7850 кг/м ³

Аналитический расчет собственных частот крутильных колебаний

Уравнение крутильных колебаний, описывающее крутильные волны в стержне постоянного сечения имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c_{ст}^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

где $c_{ст}$ – скорость распространения волны в стали;

θ – угол поворота поперечного сечения стержня.

$$c_{ст} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{7.69 \cdot 10^{10}}{7850}} = 3130.353 \left(\frac{м}{с} \right). \quad (5)$$

Решение уравнения крутильных колебаний

Решение уравнения крутильных колебаний найдено в виде:

$$\theta(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} X(x) = C \cdot \sin\left(\frac{W \cdot x}{c_{\text{кр}}}\right) + D \cdot \cos\left(\frac{W \cdot x}{c_{\text{кр}}}\right); \\ T(t) = A \cdot \sin(W \cdot t) + B \cdot \cos(W \cdot t). \end{cases} \quad (7)$$

$X(x)$ – функция, зависящая от координаты;

$T(t)$ – функция, зависящая от времени;

W – оборотная частота;

C, D, A, B – неизвестные константы.

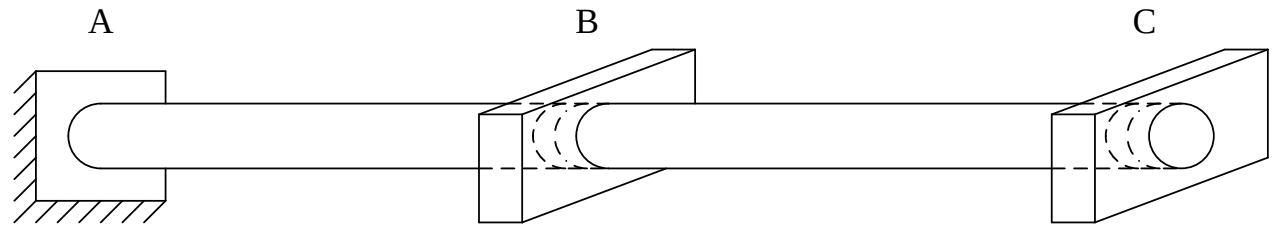


Рисунок 3 Схема конструкции

Сечение в точке А: отсутствие углов поворота;

Сечение в точке В: равенство углов поворота и моментов;

Сечение в точке С: отсутствие моментов.

Вывод результатов

Составив частотный определитель, получен график собственных частот:

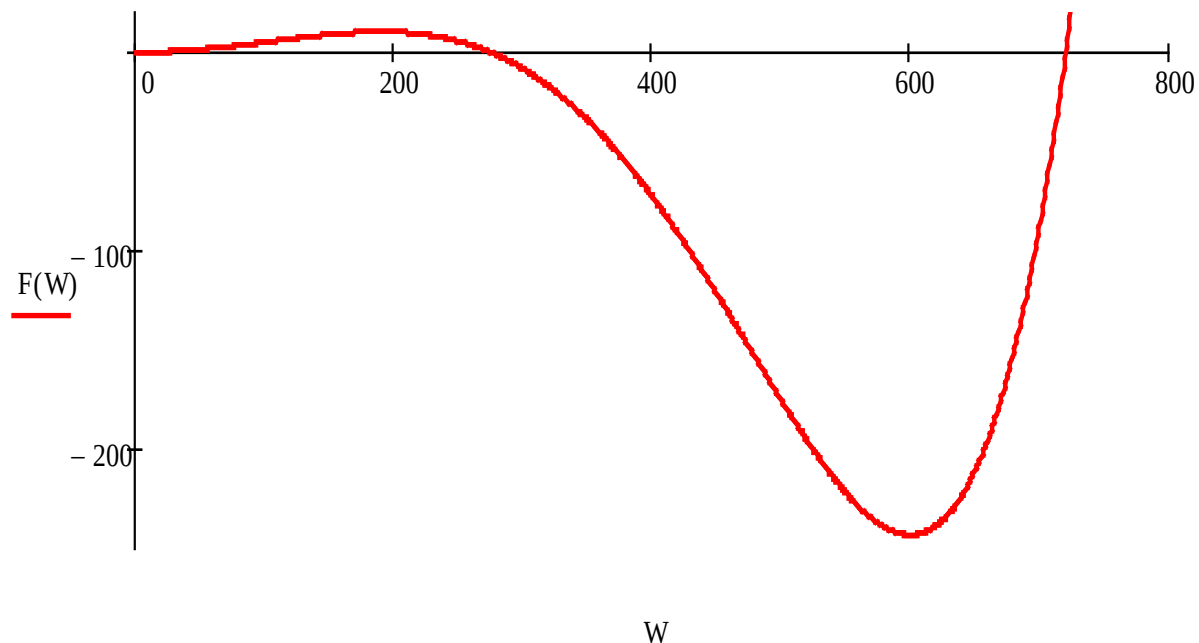


Рисунок 4 График собственных частот (рад/с)

1-я собственная частота:

$$P_{1 \text{ кр}} = \frac{\text{root}(F(W), W, 200, 500)}{2\pi} \approx 43.408 \text{ Гц}$$

2-я собственная частота:

$$P_{2 \text{ кр}} = \frac{\text{root}(F(W), W, 500, 800)}{2\pi} \approx 113.654 \text{ Гц}$$

Аналитический расчет собственных частот изгибных колебаний

Уравнение для определения
собственных частот изгибных
колебаний:

$$X^{IV} - k(w) \cdot X = 0, \quad (8)$$

где

$$k(w) = \sqrt[4]{\frac{w^2 \cdot m_{\Pi}}{E \cdot J}}, \quad (9)$$

m_{Π} – погонная масса стержня.

Решением уравнения изгибных
колебаний является:

$$X(w, x) = A \cdot S(w, x) + B \cdot T(w, x) + \\ + C \cdot U(w, x) + D \cdot V(w, x). \quad (10)$$

Функции Крылова:

$$\begin{aligned} S(w, x) &= \frac{1}{2} (\cosh(k(w) \cdot x) + \cos(k(w) \cdot x)); \\ T(w, x) &= \frac{1}{2} (\sinh(k(w) \cdot x) + \sin(k(w) \cdot x)); \\ U(w, x) &= \frac{1}{2} (\cosh(k(w) \cdot x) - \cos(k(w) \cdot x)); \\ V(w, x) &= \frac{1}{2} (\sinh(k(w) \cdot x) - \sin(k(w) \cdot x)). \end{aligned} \quad (11)$$

Вывод результатов собственных частот

Значения собственных частот изгибных колебаний:

$$P_{1 \text{ изг}} = 7.572 \text{ Гц}; \quad P_{2 \text{ изг}} = 49.256 \text{ Гц}.$$

Результаты собственных частот колебаний при добавлении дополнительной опоры в виде подшипника и увеличении диаметра стержня до 1.5 см представлены в таблице 2.

Схема стенда с дополнительной опорой:

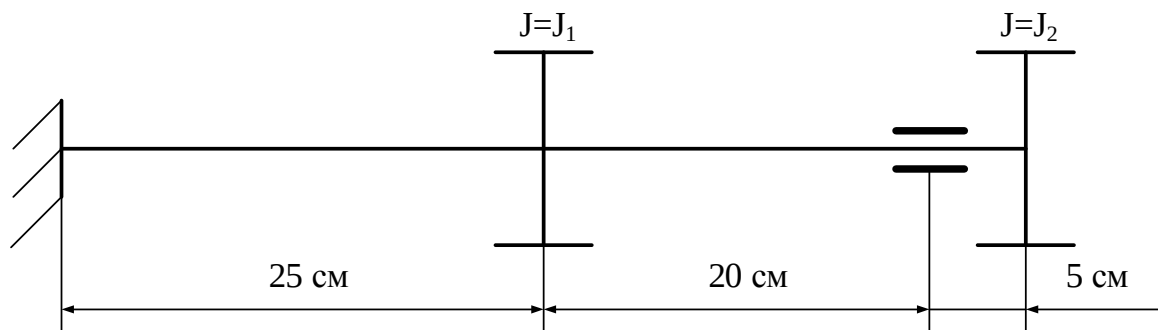


Рисунок 5 Схема конструкции

Таблица 2 – значения собственных частот

Частота	Крутильная, Гц	Изгибная, Гц
P_1	97.425	104,083
P_2	255.181	288,516

Оптимизация инерционных элементов

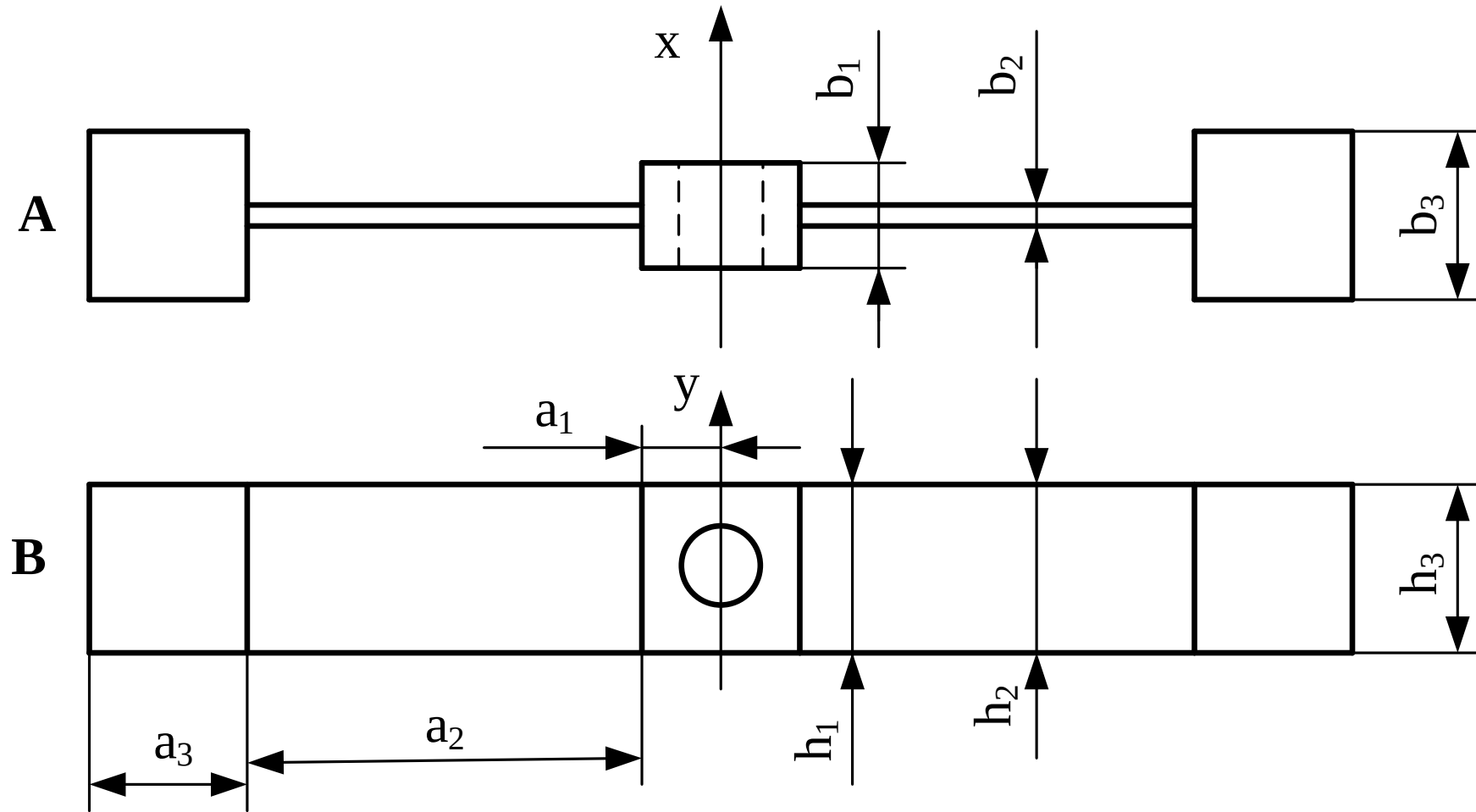


Рисунок 6 Геометрия инерционного элемента

(А – вид сверху; В – вид спереди)

Результаты расчета с оптимизированными инерционными элементами

Таблица 3 – Геометрия инерционного элемента

Параметр	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	h_1	h_2	h_3
Значение, мм	15	120	30	20	5	30	30	30	30

Таблица 4 – Физические характеристики инерционного элемента

m	J
0.82 кг	0.011572 кг·м ²

Таблица 5 – Значения собственных частот

Номер частоты	Крутильные, Гц	Изгибные, Гц
1	35.749	106.981
2	93.598	297.779

Создание конечно-элементной модели в ANSYS

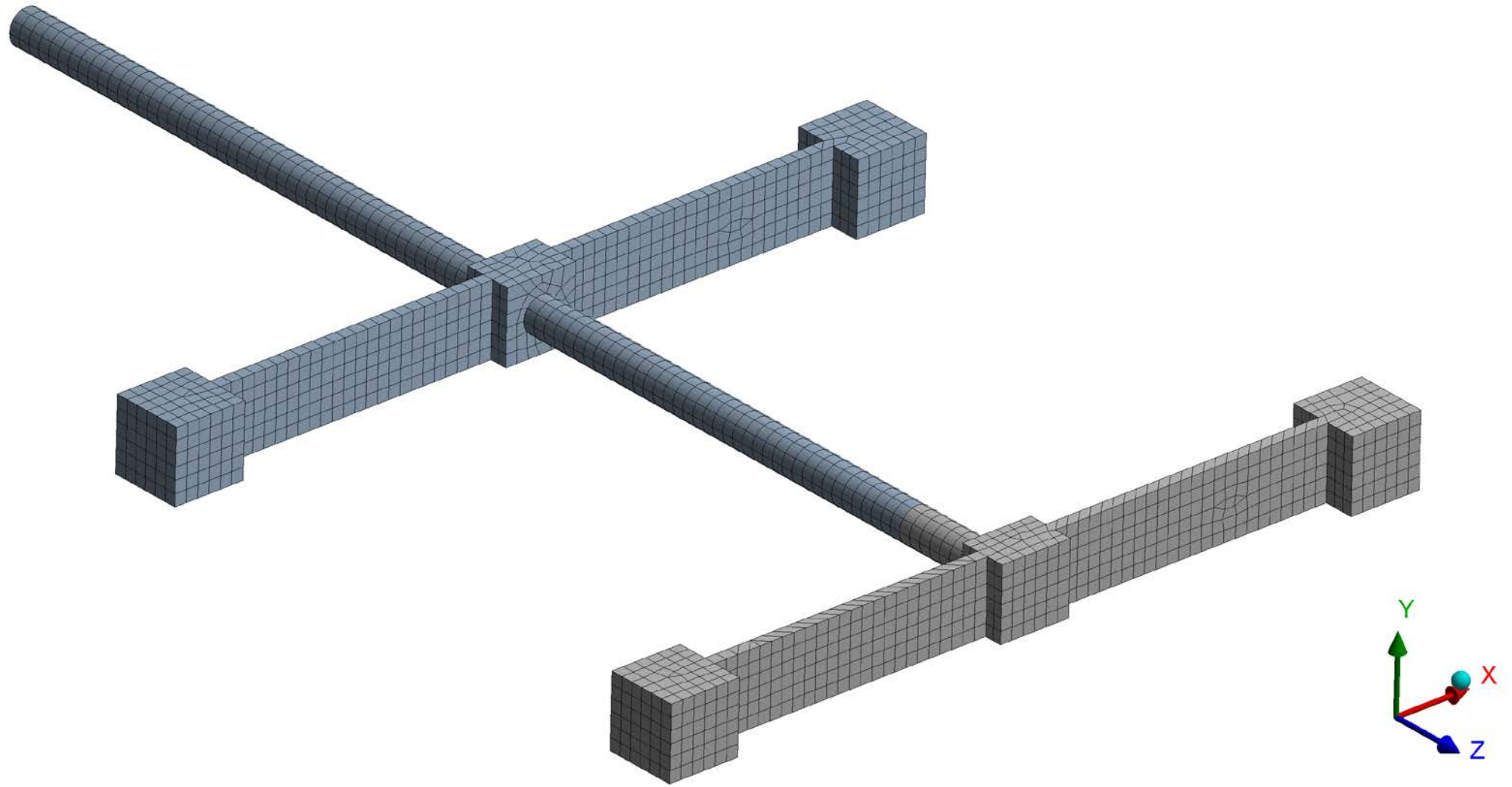


Рисунок 7 Конечно-элементная сетка (4224 элементов)

Настройка и результаты численного расчета

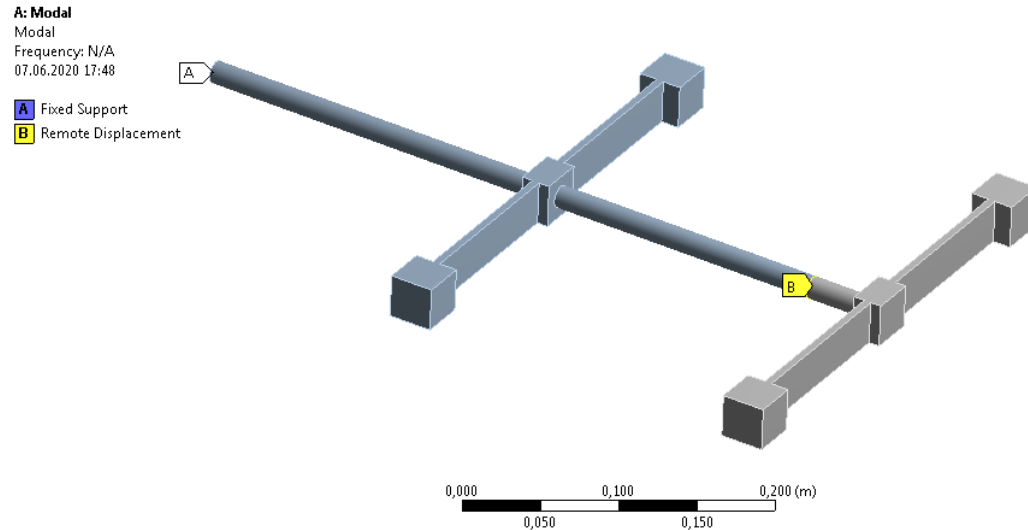


Рисунок 8 Граничные условия

1	Property	Value	Unit
2	Density	7850	kg m ⁻³
3	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion		
4	Coefficient of Thermal Expansion	1,2E-05	C ⁻¹
5	Zero-Thermal-Strain Reference Temperature	22	C
6	Isotropic Elasticity		
7	Derive from	Young'...	
8	Young's Modulus	2E+11	Pa
9	Poisson's Ratio	0,3	
10	Bulk Modulus	1,6667E+11	Pa
11	Shear Modulus	7,6923E+10	Pa

Рисунок 9 Физические характеристики

Details of "Analysis Settings"	
Options	
Max Modes to Find	10
Limit Search to Range	No
Solver Controls	
Damped	No
Solver Type	Program Controlled
Rotordynamics Controls	
Coriolis Effect	Off
Campbell Diagram	Off
Output Controls	
Stress	No
Strain	No
Nodal Forces	No
Calculate Reactions	No
General Miscellaneous	No

Рисунок 10 Настройки решателя

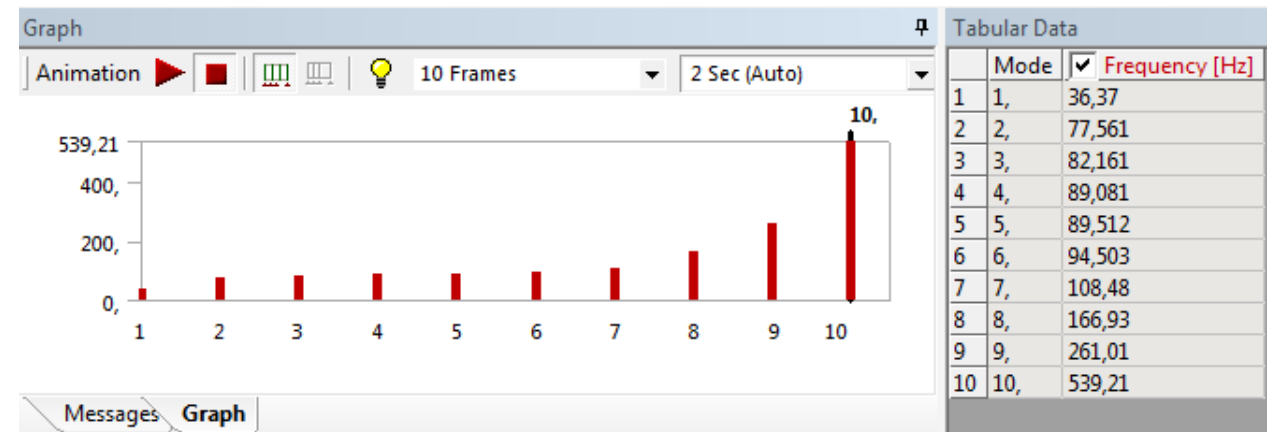


Рисунок 11 Результаты модального анализа

Формы изгибно-крутильных колебаний

A: Modal
Total Deformation
Type: Total Deformation
Frequency: 36,37 Hz
Unit: m
08.06.2020 12:23

1,3053 Max
1,1603
1,0152
0,8702
0,72517
0,58013
0,4351
0,29007
0,14503
0 Min

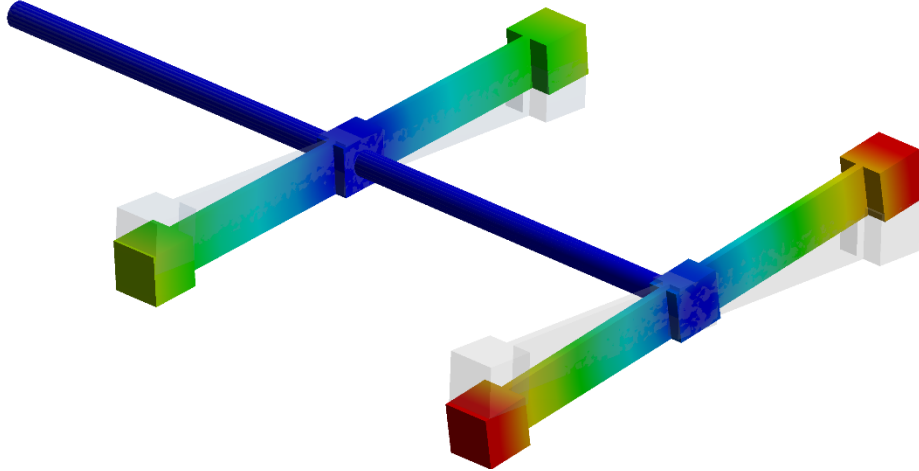


Рисунок 12 Крутильные колебания при 36.37 Гц

A: Modal
Total Deformation 6
Type: Total Deformation
Frequency: 94,503 Hz
Unit: m
08.06.2020 12:33

1,3091 Max
1,1637
1,0182
0,87276
0,7273
0,58184
0,43638
0,29092
0,14546
0 Min

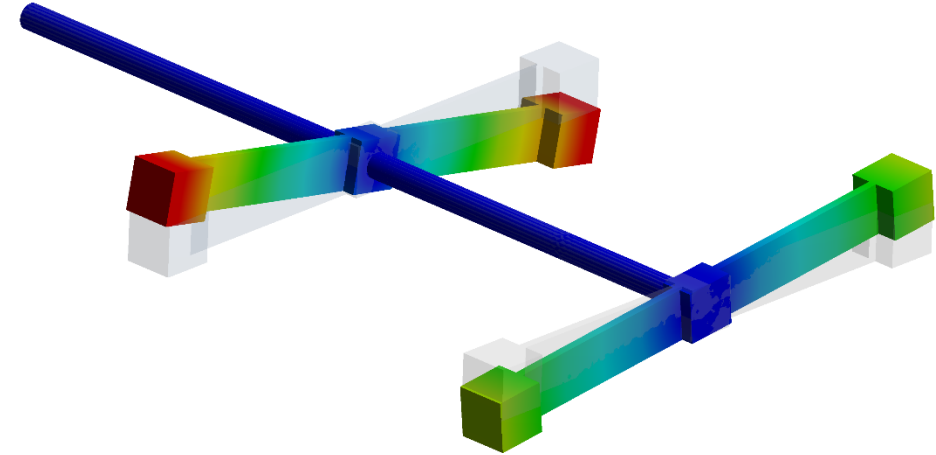


Рисунок 13 Крутильные колебания при 94.503 Гц

A: Modal
Total Deformation 7
Type: Total Deformation
Frequency: 108,48 Hz
Unit: m
08.06.2020 12:36

0,91542 Max
0,81371
0,71199
0,61028
0,50857
0,40685
0,30514
0,20343
0,10171
0 Min

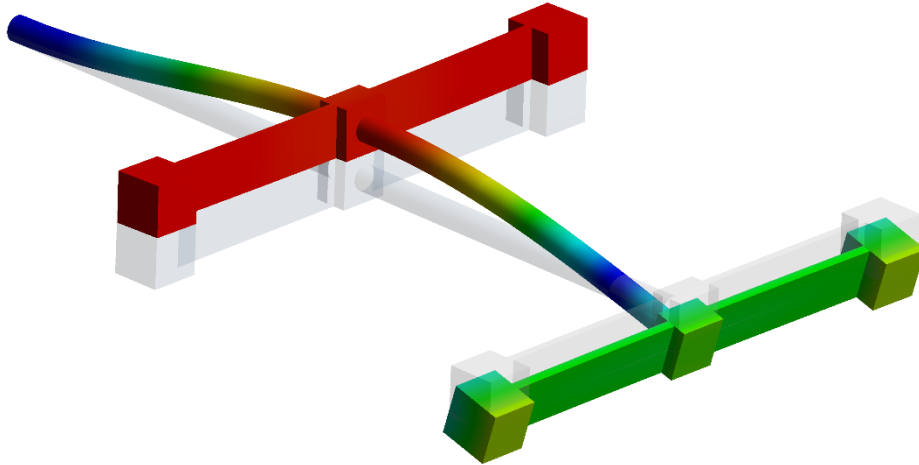


Рисунок 14 Изгибные колебания при 108.48 Гц

A: Modal
Total Deformation 9
Type: Total Deformation
Frequency: 261,01 Hz
Unit: m
08.06.2020 12:36

1,4149 Max
1,2577
1,1005
0,94327
0,78606
0,62885
0,47163
0,31442
0,15721
0 Min

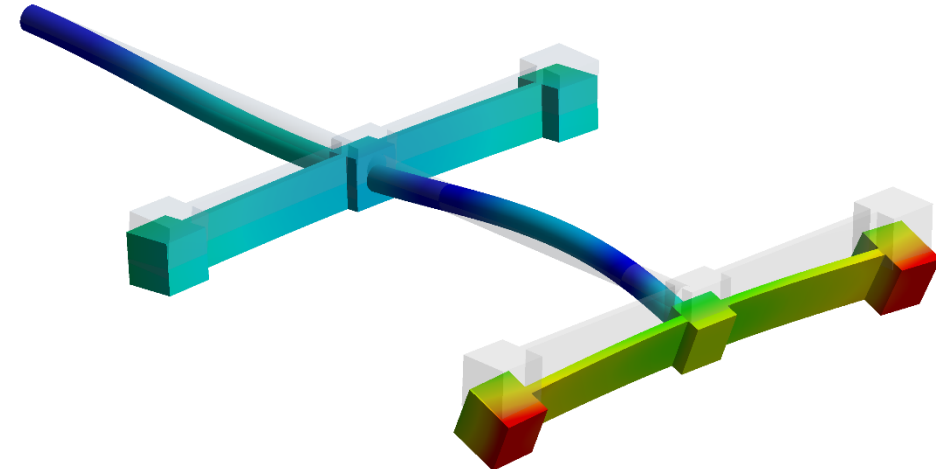


Рисунок 15 Изгибные колебания при 261.01 Гц

Формы колебаний при 2-5 собственных частотах

A: Modal
Total Deformation 2
Type: Total Deformation
Frequency: 77.561 Hz
Unit: m
12.06.2020 18:11

1.6747 Max
1.4886
1.3025
1.1165
0.93039
0.74431
0.55823
0.37216
0.18608
0 Min

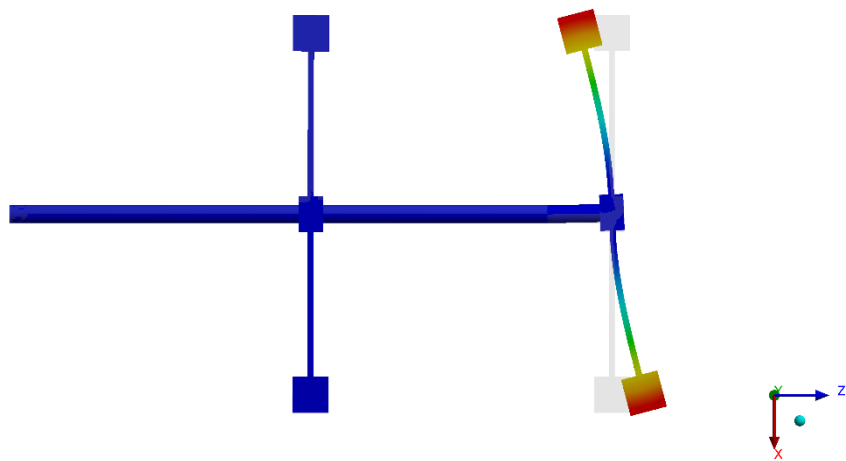


Рисунок 16 Изгибные колебания при 77.561 Гц

A: Modal
Total Deformation 3
Type: Total Deformation
Frequency: 82.161 Hz
Unit: m
12.06.2020 18:11

1.6923 Max
1.5043
1.3162
1.1282
0.94016
0.75213
0.56409
0.37606
0.18803
0 Min

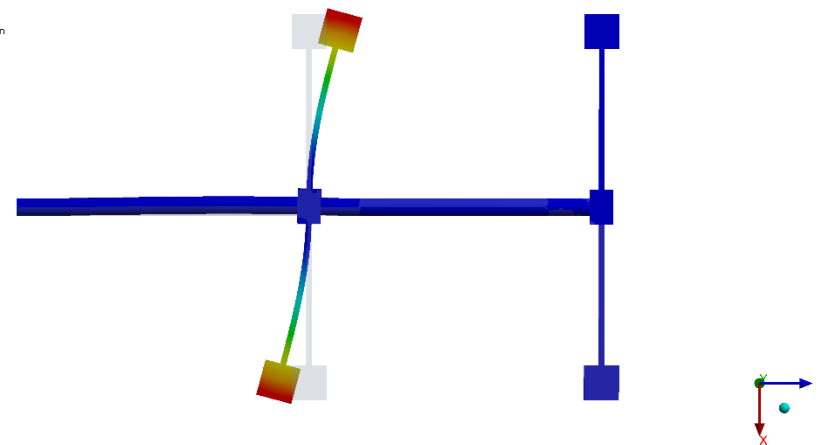


Рисунок 17 Изгибные колебания при 82.161 Гц

A: Modal
Total Deformation 4
Type: Total Deformation
Frequency: 89.081 Hz
Unit: m
12.06.2020 18:12

1.6889 Max
1.5012
1.3136
1.1259
0.93828
0.75052
0.56297
0.37531
0.18766
0 Min

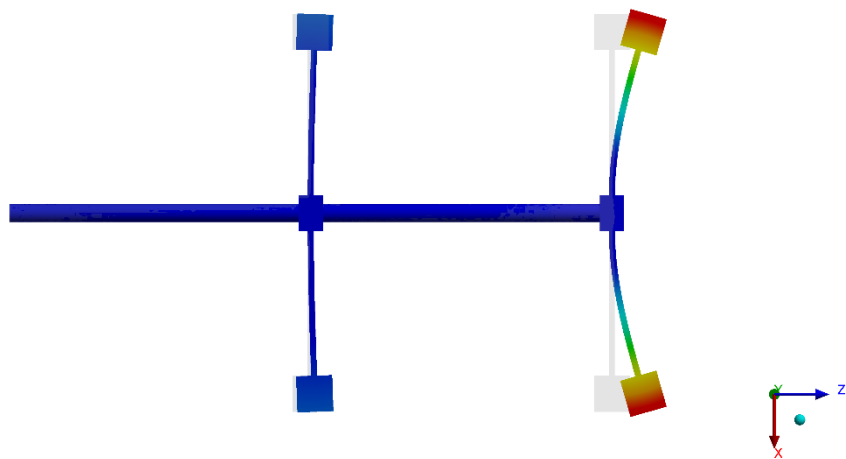


Рисунок 18 Изгибные колебания при 89.081 Гц

A: Modal
Total Deformation 5
Type: Total Deformation
Frequency: 89.512 Hz
Unit: m
12.06.2020 18:12

1.6984 Max
1.5097
1.321
1.1323
0.94357
0.75485
0.56614
0.37743
0.18871
0 Min

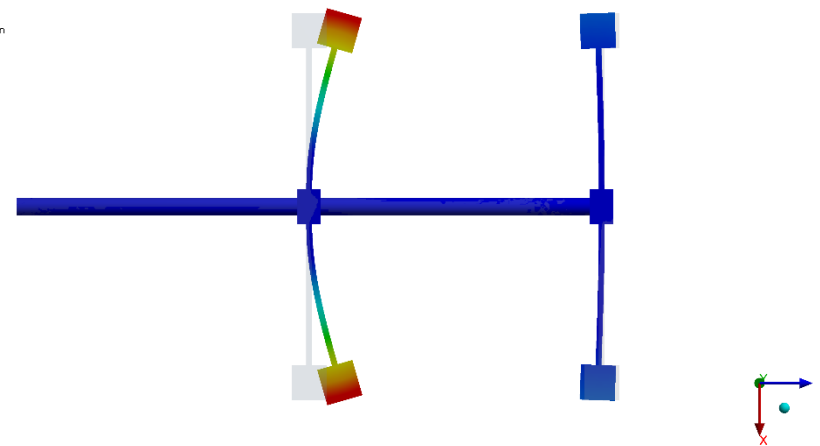


Рисунок 19 Изгибные колебания при 89.512 Гц

Упрощенный расчет в ANSYS

A: Modal
Total Deformation 9
Type: Total Deformation
Frequency: 261.01 Hz
Unit: m
09.06.2020 12:52

1,4149 Max
1,2577
1,1005
0,94327
0,78606
0,62885
0,47163
0,31442
0,15721
0 Min

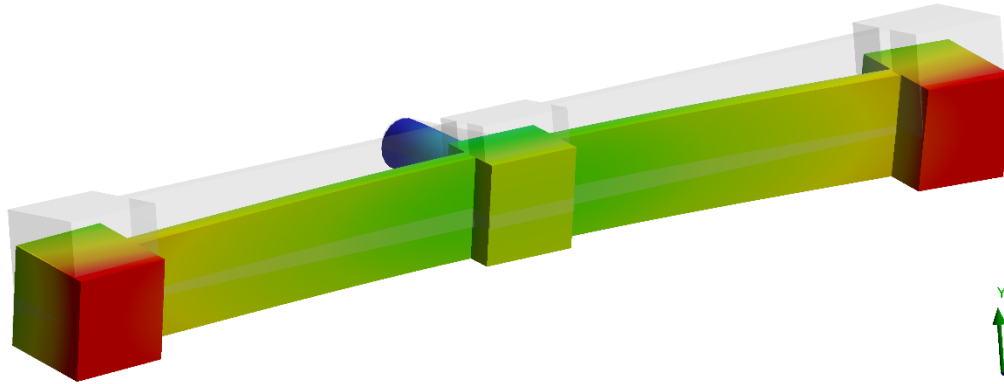


Рисунок 20 Колебания груза при 261.01 Гц

A: Modal
Modal
Frequency: N/A
09.06.2020 13:20

A Fixed Support
B Remote Displacement
C Point Mass
D Point Mass 2

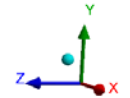
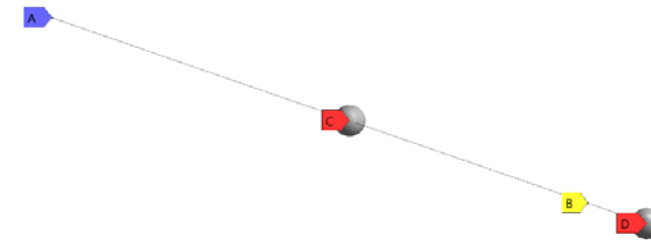
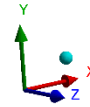


Рисунок 21 Упрощенная модель

Details of "Point Mass"	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Applied By	Direct Attachment
Geometry	1 Vertex
Definition	
☐ Mass	0,82 kg
Coordinate System	Elemental Coordinate System
☐ Mass Moment of Inertia X	1,1572e-002 kg·m ²
☐ Mass Moment of Inertia Y	0, kg·m ²
☐ Mass Moment of Inertia Z	0, kg·m ²

Рисунок 22 Характеристики груза

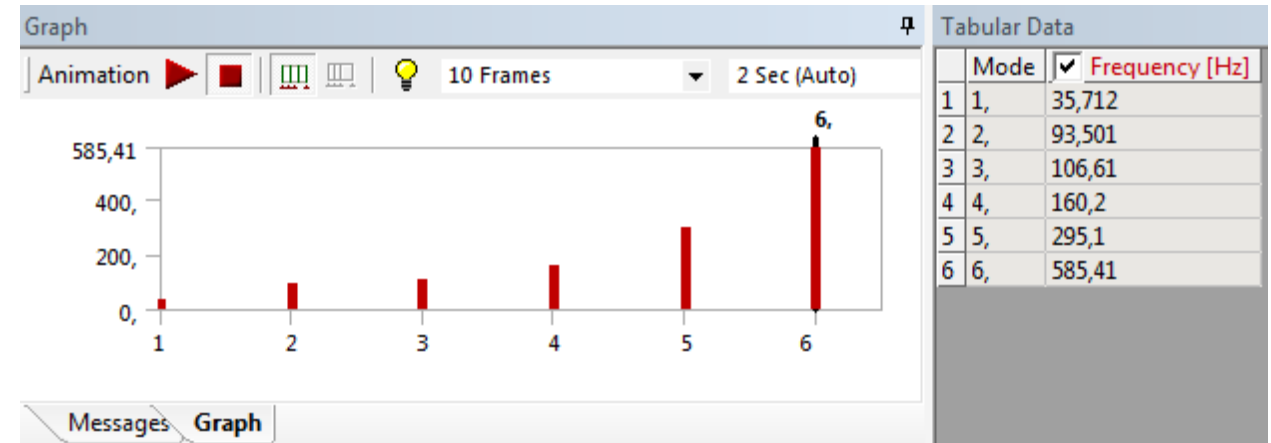


Рисунок 23 Результаты расчета

Сравнение результатов

Таблица 6 – Значения собственных частот

Способ расчета	1-я крутильная частота, Гц	2-я крутильная частота, Гц	1-я изгибная частота, Гц	2-я изгибная частота, Гц
Стандартный численный	36.37	94.503	108.48	261.01
Упрощенный численный	35.712	93.501	106.61	295.1
Погрешность %	1.809	1.06	1.724	-13.061

Таблица 7 – Значения собственных частот

Способ расчета	1-я крутильная частота, Гц	2-я крутильная частота, Гц	1-я изгибная частота, Гц	2-я изгибная частота, Гц
Стандартный численный	36.37	94.503	108.48	261.01
Аналитический	35.749	93.598	106.981	297.779
Погрешность %	1.707	0.958	1.382	-14.087

Гармонический анализ конструкции

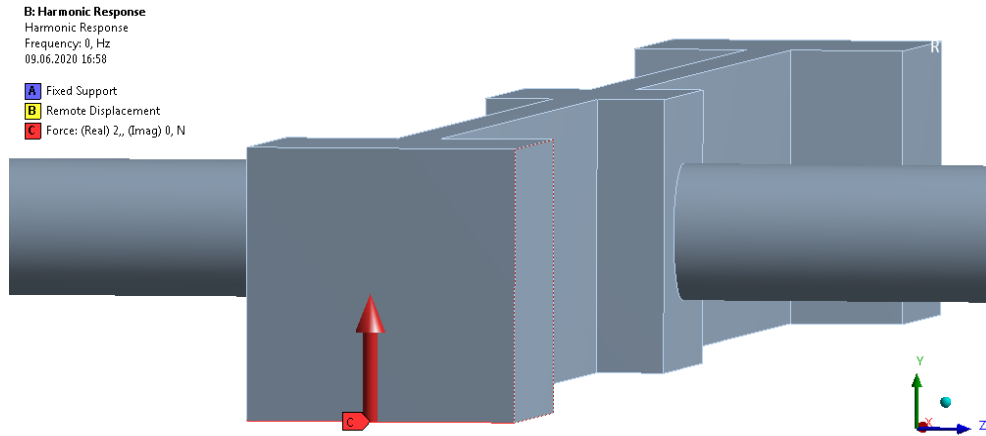


Рисунок 24 Циклическая нагрузка

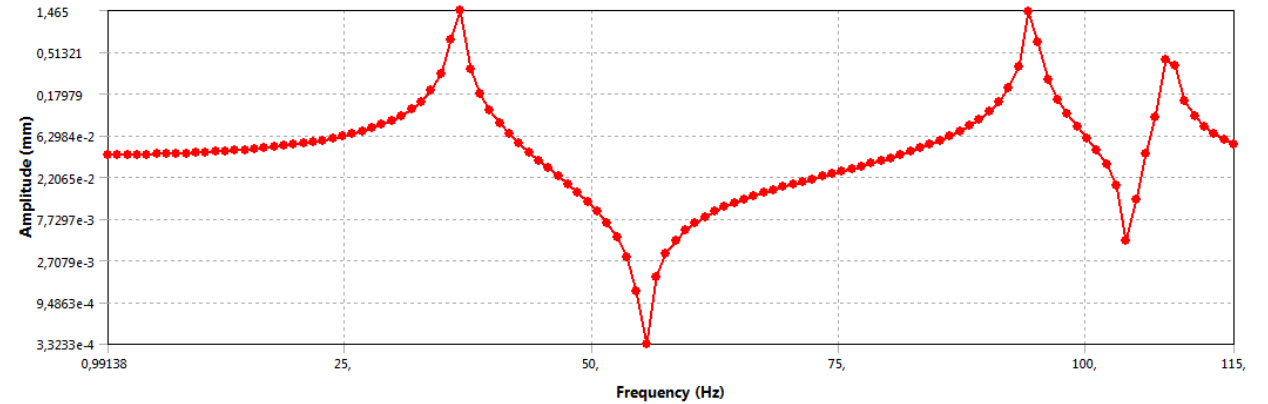


Рисунок 26 Перемещения края инерционного элемента

Details of "Analysis Settings"	
Options	
Frequency Spacing	Linear
☐ Range Minimum	0, Hz
☐ Range Maximum	115, Hz
☐ Solution Intervals	116
User Defined Frequencies	Off
Solution Method	Mode Superposition
Include Residual Vector	No
Cluster Results	No
Modal Frequency Range	Program Controlled
Store Results At All Frequencies	Yes

Рисунок 25 Настройка решателя

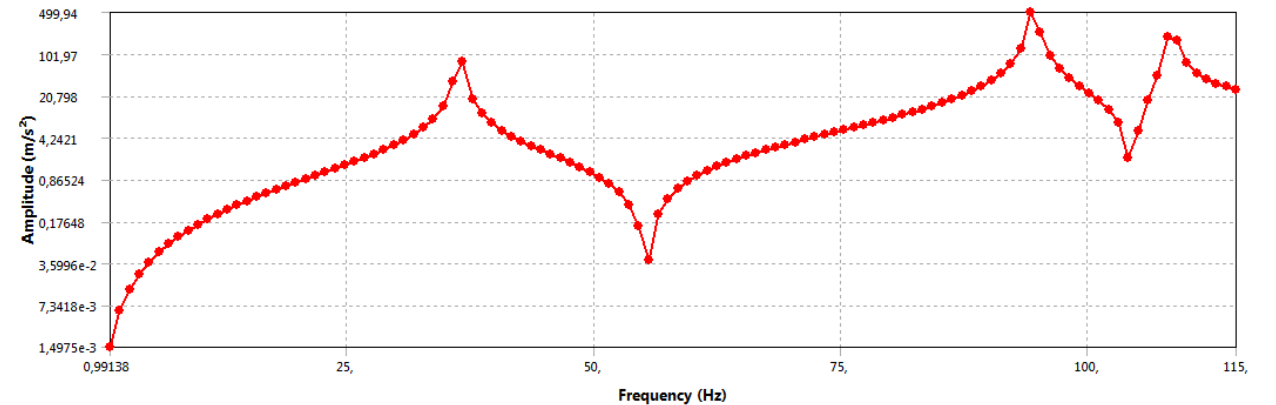
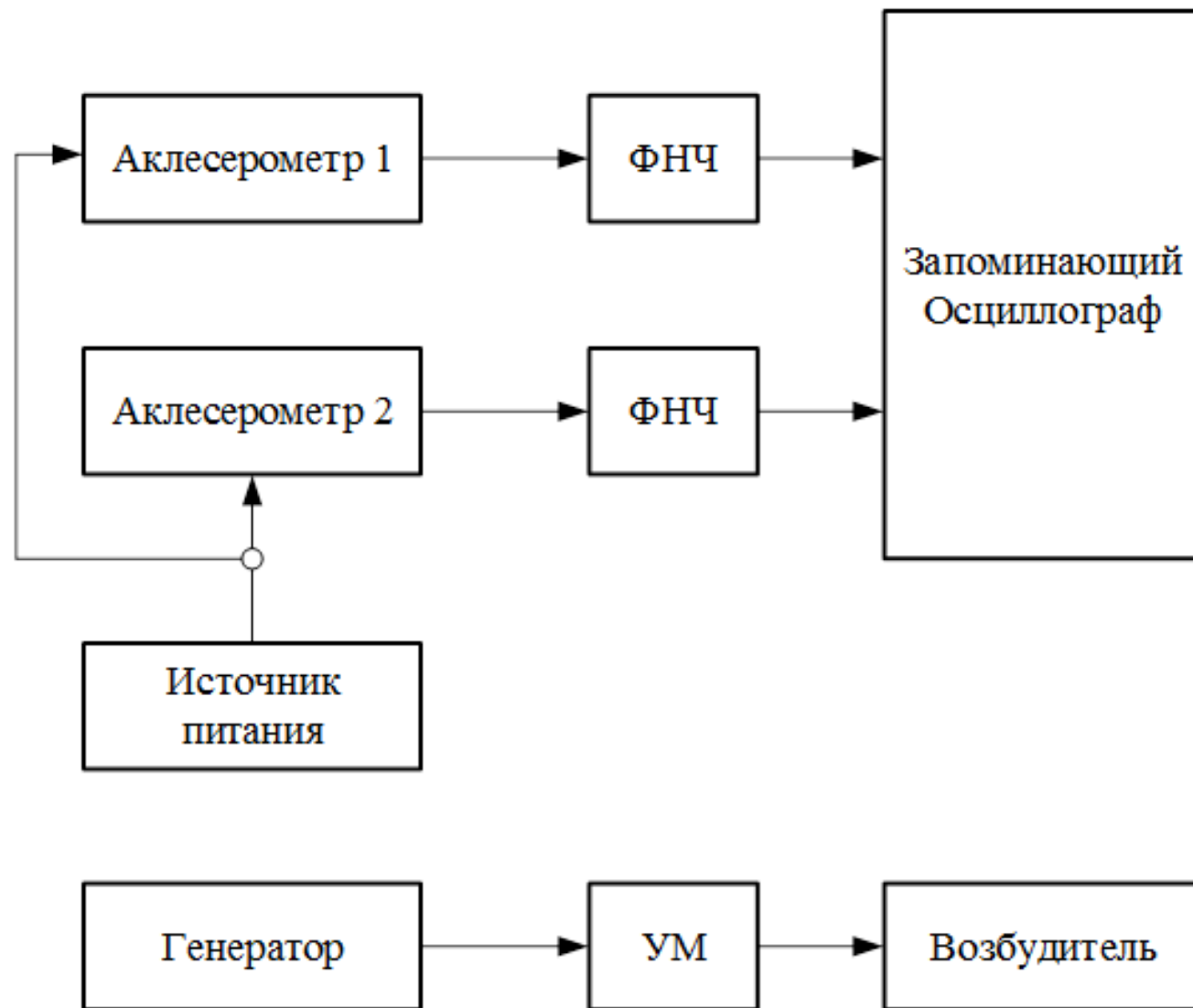


Рисунок 27 Ускорение края инерционного элемента

Измерительная часть стенда



Заключение

1. Выполнено предварительное конструирование лабораторного стенда для исследования крутильных колебаний. В качестве предварительной конструкции стенда, выбран жестко закрепленный круглый стержень с двумя инерционными элементами, имеющими форму прямоугольных брусьев.
2. Проведен аналитический расчет собственных частот крутильных и изгибных колебаний системы с распределенными параметрами. Проведена оптимизация геометрических параметров и условий закрепления конструкции стенда. Изменение геометрических параметров инерционных элементов и сечения стержня, с добавлением дополнительной шарнирной опоры способствовало получению 2-х собственных крутильных частот в диапазоне 10 – 100 Гц.
3. Выполнен численный модальный и гармонический анализ КЭ модели лабораторного стенда в программном комплексе ANSYS Workbench. Получены предполагаемые амплитуды виброперемещений и виброускорений в зависимости от частоты приложенной нагрузки. Сравнительный анализ результатов аналитического и численного расчета показал адекватность разработанной модели лабораторного стенда.
4. Разработана измерительная часть лабораторного стенда и методические указания о порядке проведения лабораторной работы.

Министерство науки и высшего образования России
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ивановский государственный энергетический университет
имени В.И. Ленина»

Кафедра теоретической и прикладной механики

**«Разработка учебного стенда для исследования
крутильных колебаний»**

Выполнил: студент гр. 4-33, Лазарев А.А.
Руководитель: к.т.н., доцент, Огурцов Ф.Б.