

федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ В.И. ЛЕНИНА»

Кафедра теоретической и прикладной механики

**«Теоретическое и компьютерное  
исследование динамических  
характеристик трубы с растяжками»**

ВЫПОЛНИЛ: СТУДЕНТ ГРУППЫ 4 – 33

КУВЕНЕВ О.М.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

К. Т. Н., ДОЦЕНТ ФЁДОРОВ Ю.А.

Иваново 2021



Рис.1. Труба котельной ИГЭУ

## **Цель**

Исследование динамических характеристик дымовой трубы с вантовыми растяжками

## **Задачи**

1. Теоретическое исследование динамических характеристик трубы с растяжками.
2. Компьютерное исследование динамических характеристик трубы с растяжками.
3. Анализ полученных результатов.

# Постановка задачи

Высота: 45 м

Диаметр трубы: 1020 мм

Толщина стенки: 10 мм

Момент инерции сечения:  $4.046 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$

Материал трубы: сталь С255

Модуль Юнга стали:  $2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

Погонная масса: 249.081 кг/м

Отметки крепления оттяжек: +17,6 ; +35,5 м

$F_1 = 58165.005 \text{ Н}$  – сумма вертикальных проекций усилий натяжения вантовых оттяжек нижнего уровня;

$F_2 = 20576.983 \text{ Н}$  – сумма вертикальных проекций усилий натяжения вантовых оттяжек верхнего уровня;

$h_1 = 17.6 \text{ м}$  – длина первого участка трубы;

$h_2 = 17.9 \text{ м}$  – длина второго участка трубы;

$h_3 = 9.5 \text{ м}$  – длина третьего участка трубы;

$g$  – ускорение свободного падения.

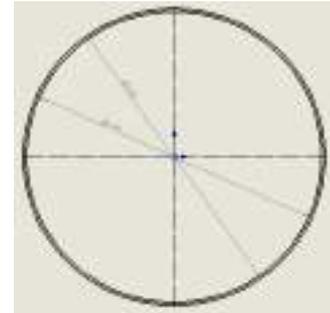


Рис. 2. Поперечное сечение трубы.

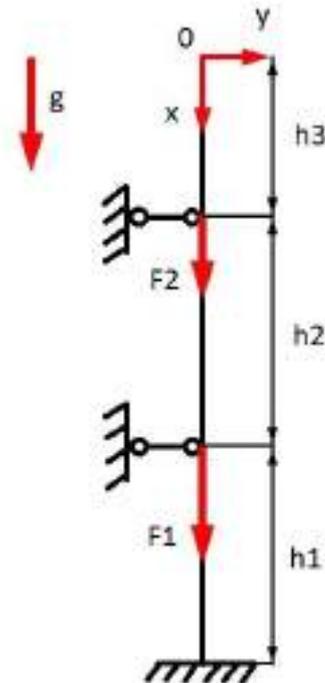


Рис. 3. Расчётная схема трубы.

# Расчёт собственных частот двухпролётного стержня с консолью без учёта продольной силы

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( m \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right) = 0 \quad (1)$$

$$y(x,t) = T(t) * Y(x) \quad (2)$$

$$Y''(x) + \frac{m\omega^2}{EY} Y(x) = 0 \quad (3)$$

$$S(x) = \frac{\cosh(x) + \cos(x)}{2}$$

$$T(x) = \frac{\sinh(x) + \sin(x)}{2} \quad (4)$$

$$U(x) = \frac{\cosh(x) - \cos(x)}{2}$$

$$V(x) = \frac{\sinh(x) - \sin(x)}{2}$$

# Решение методом начальных параметров

$$Y(x) = Y(0)S(\lambda x) + \frac{Y'(0)}{\lambda}T(\lambda x) + \frac{Y''(0)}{\lambda^2 EJ}U(\lambda x) + \frac{R2}{\lambda^3 EJ}V(\lambda(x - h3)) + \frac{R1}{\lambda^3 EJ}V(\lambda(x - h3 - h2)) + \frac{Y'''(0)}{\lambda^3 EJ}V(\lambda x) \quad (5)$$

$$Y(x) = Y(0)S(\lambda x) + \frac{Y'(0)}{\lambda}T(\lambda x) + \frac{R2}{\lambda^3 EJ}V(\lambda(x - h3)) + \frac{R1}{\lambda^3 EJ}V(\lambda(x - h3 - h2)) \quad (6)$$

$$Y(h3) = 0$$

$$Y(h3 + h2) = 0$$

$$Y(H) = 0$$

$$Y'(H) = 0$$

(7)

# Построение графика частотного уравнения и определение собственных частот без учёта продольных сил

$$y(\omega) := \begin{bmatrix} S \left( \sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot h3 \right) & T \left( \frac{\sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot h3}{\sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}}} \right) & 0 & 0 \\ S \left[ \sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot (h3 + h2) \right] & T \left[ \frac{\sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot (h3 + h2)}{\sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}}} \right] & V \left( h2 \cdot \sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \right) & 0 \\ S \left( \sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot H \right) & T \left( \frac{\sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot H}{\sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}}} \right) & V \left[ \frac{\sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot (h2 + h1)}{\sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}}} \right] & V \left( h1 \cdot \sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \right) \\ \sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot V \left( \sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot H \right) & S \left( \sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot H \right) & U \left[ \frac{\sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot (h2 + h1)}{\left( \sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \right)^2 \cdot EJ} \right] & U \left[ \frac{\sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \cdot h1}{\left( \sqrt[4]{m \cdot \frac{\omega^2}{EJ}} \right)^2 \cdot EJ} \right] \end{bmatrix}$$

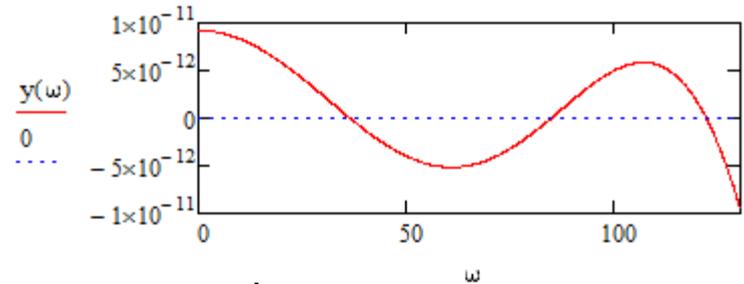


Рис.4. График частотного уравнения.

(8)

$$\omega_1 = 5.787 \quad \text{Гц}$$

$$\omega_2 = 13.473 \quad \text{Гц}$$

$$\omega_3 = 19.387 \quad \text{Гц}$$

# Приближённый расчёт энергетическим методом Рэлея

$$T + U = \text{const} \quad (9) \quad T_{\max} = \frac{1}{2} w^2 m \int_0^H Y(x)^2 dx \quad (11)$$

$$T_{\max} = U_{\max} \quad (10) \quad U_{\max} = \frac{1}{2} EJ \int_0^H \left( \frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^H N(x) \left( \frac{\partial Y(x)}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\begin{aligned} N(x) &= mgx & 0 \leq x < h_3 \\ N(x) &= mgx + F_2 & h_3 \leq x < h_3 + h_2 \\ N(x) &= mgx + F_2 + F_1 & h_3 + h_2 \leq x < H \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= Y(0)S(\lambda x) + \frac{Y'(0)}{\lambda} T(\lambda x) & 0 \leq x < h_3 \\ Y_2(x) &= Y(0)S(\lambda x) + \frac{Y'(0)}{\lambda} T(\lambda x) + \frac{R_2}{\lambda^3 EJ} V(\lambda(x - h_3)) & h_3 \leq x < h_3 + h_2 \\ Y_3(x) &= Y(0)S(\lambda x) + \frac{Y'(0)}{\lambda} T(\lambda x) + \frac{R_2}{\lambda^3 EJ} V(\lambda(x - h_3)) + \frac{R_1}{\lambda^3 EJ} V(\lambda(x - h_3 - h_2)) & h_3 + h_2 \leq x < H \end{aligned} \quad (13)$$

# Выражение для нахождения собственных частот методом Рэля с учётом продольных сил

СИЛ

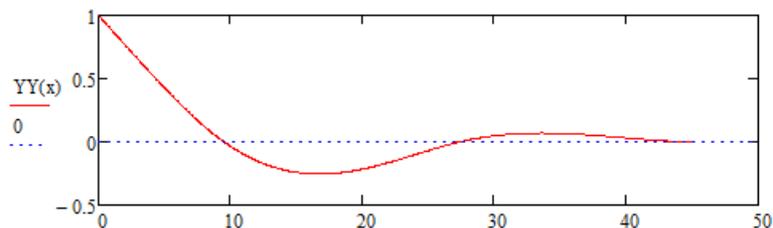
$$\omega := \sqrt{\frac{A - B}{C}}$$

$$A := EJ \cdot \left[ \int_0^{h3} \left( \frac{d^2}{dx^2} Y1(x) \right)^2 dx + \int_{h3}^{h2+h3} \left( \frac{d^2}{dx^2} Y2(x) \right)^2 dx + \int_{h2+h3}^H \left( \frac{d^2}{dx^2} Y3(x) \right)^2 dx \right] \quad (14)$$

$$B := \int_0^{h3} (x \cdot m \cdot 9.8) \cdot \left( \frac{d^1}{dx^1} Y1(x) \right)^2 dx + \int_{h3}^{h3+h2} (x \cdot m \cdot 9.8 + F2) \cdot \left( \frac{d^1}{dx^1} Y2(x) \right)^2 dx + \int_{h3+h2}^H (x \cdot m \cdot 9.8 + F2 + F1) \cdot \left( \frac{d^1}{dx^1} Y3(x) \right)^2 dx$$

$$C := m \cdot \left[ \int_0^{h3} (Y1(x))^2 dx + \int_{h3}^{h2+h3} (Y2(x))^2 dx + \int_{h3+h2}^H (Y3(x))^2 dx \right]$$

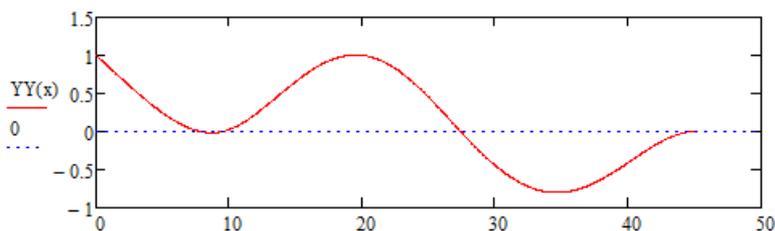
# Собственные частоты и формы двухпролётного стержня с консолью с учётом продольных сил



$$\begin{aligned} YY(0) &= 1 \\ YY(h_3) &= 0 \\ YY(h_3 + h_2) &= 0 \\ YY(H) &= 3.775 \times 10^{-15} \end{aligned}$$

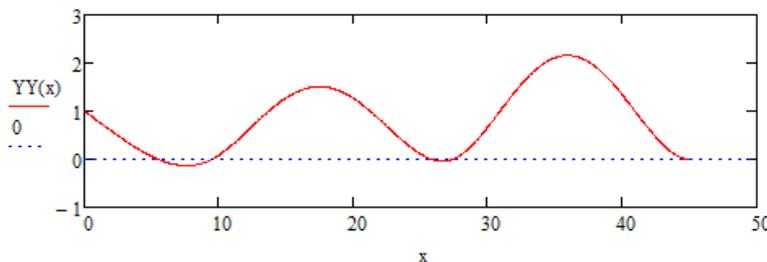
Рис.5. Форма колебаний балки с учётом продольных сил при первой собственной частоте.

$$\begin{aligned} \omega_{1p} &= 5.781 \text{ Гц} \\ \omega_{2p} &= 13.46 \text{ Гц} \\ \omega_{3p} &= 19.375 \text{ Гц} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} YY(0) &= 1 \\ YY(h_3) &= 0 \\ YY(h_3 + h_2) &= 0 \\ YY(H) &= 0 \end{aligned}$$

Рис.6. Форма колебаний балки с учётом продольных сил при второй собственной частоте.



$$\begin{aligned} YY(0) &= 1 \\ YY(h_3) &= 0 \\ YY(h_3 + h_2) &= -7.105 \times 10^{-15} \\ YY(H) &= -1.421 \times 10^{-14} \end{aligned}$$

Рис.7. Форма колебаний балки с учётом продольных сил при третьей собственной частоте.

# Задание физических свойств и создание геометрии трубы

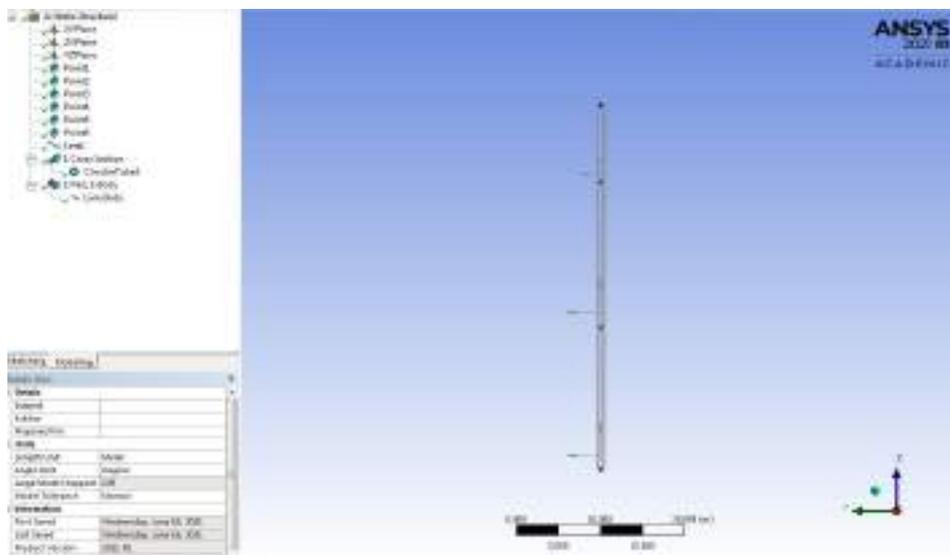


Рис.8. Геометрия трубы.

1	Contents of Engineering Data		Source	Description
2	Material			
2	Structural Steel			Fatigue Data at zero mean stress comes from 1998 ASME BPV Code, Section 8, Div 2, Table 5-130.1
Click here to add a new material.				
Properties of Outline Row 3: Structural Steel				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Material Field Variables	Table		
3	Density	7850	kg/m <sup>3</sup>	
4	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion			
5	Isotropic Elasticity			
7	Derive from	Young's Mod...		
8	Young's Modulus	2E+11	Pa	
9	Poisson's Ratio	0,3		
10	Bulk Modulus	1,6667E+11	Pa	
11	Shear Modulus	7,6923E+10	Pa	
12	Strain-Life Parameters			
20	S-N Curve	Tabular		
24	Tensile Yield Strength	2,3E+08	Pa	
25	Compressive Yield Strength	2,3E+08	Pa	
26	Tensile Ultimate Strength	4,0E+08	Pa	
27	Compressive Ultimate Strength	0	Pa	

Рис.9. Физические свойства стали.

# Создание конечно-элементной сетки

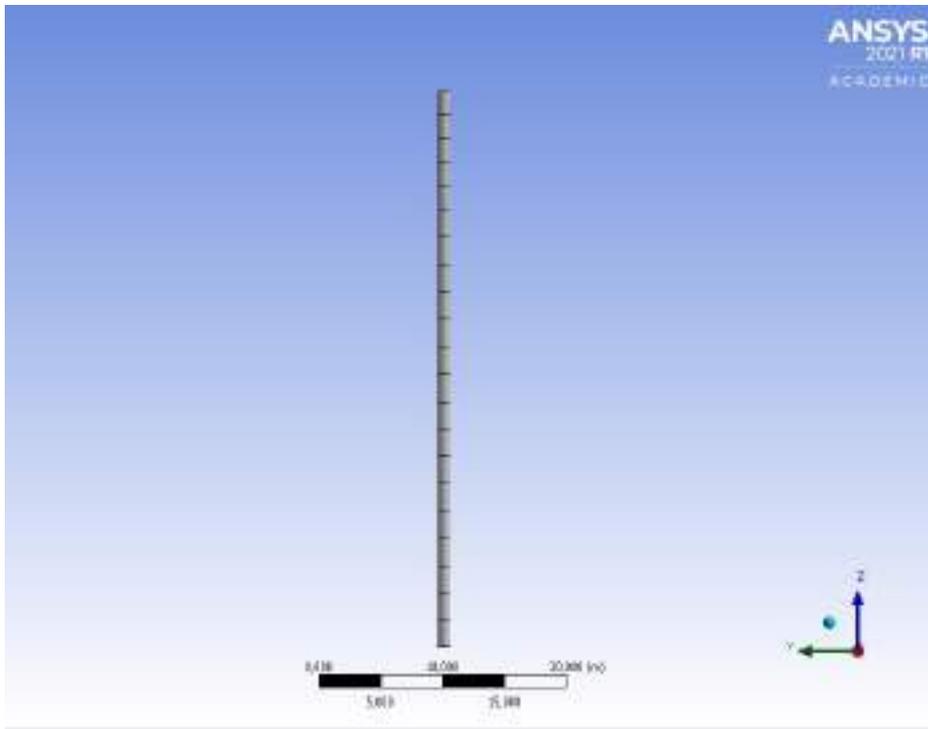


Рис.10. КЭ сетка.

Details of "Mesh"	
<b>Display</b>	
Display Style	Use Geometry Setting
<b>Defaults</b>	
Physics Preference	Mechanical
Element Order	Program Controlled
<input type="checkbox"/> Element Size	Default
<b>Sizing</b>	
Use Adaptive Sizing	Yes
Resolution	Default (2)
Mesh Defeaturing	Yes
<input type="checkbox"/> Defeature Size	Default
Transition	Fast
Span Angle Center	Coarse
Initial Size Seed	Assembly
Bounding Box Dimension	45, m
Average Surface Area	0, m <sup>2</sup>
Minimum Edge Length	1, e-003 m

Рис.11. Параметры КЭ сетки.

# Граничные условия, настройка решателя и расчёт собственных частот

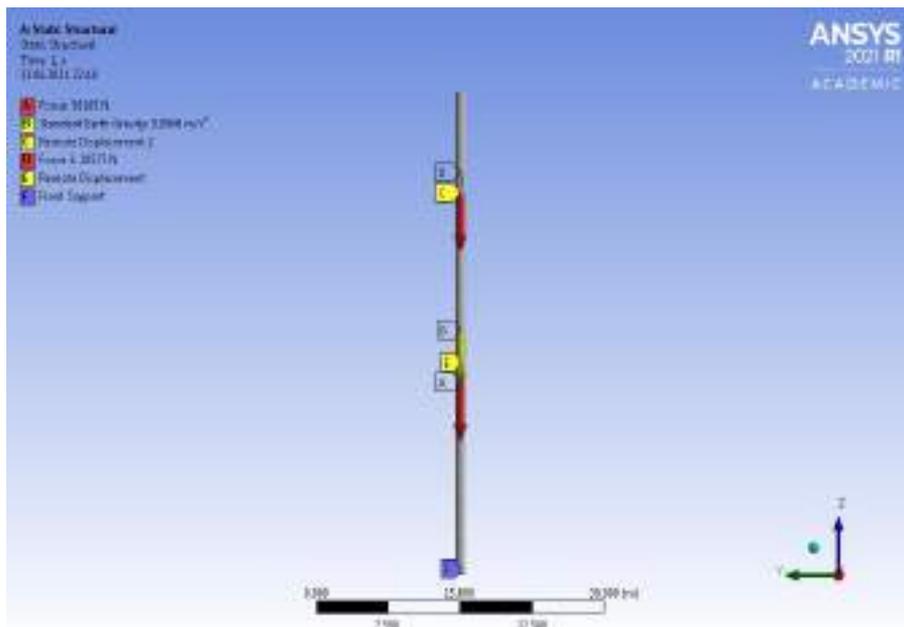


Рис.12. Граничные условия.

Details of "Analysis Settings"	
<b>Options</b>	
Max Modes to Find	6
Limit Search to Range	Yes
Range Minimum	0, Hz
Range Maximum	1,e+008 Hz
Spin Softening	Program Controlled
<b>Solver Controls</b>	
Damped	No
Solver Type	Program Controlled
<b>Rotordynamics Controls</b>	
<b>Output Controls</b>	
<b>Analysis Data Management</b>	

Рис.13. Настройка решателя.

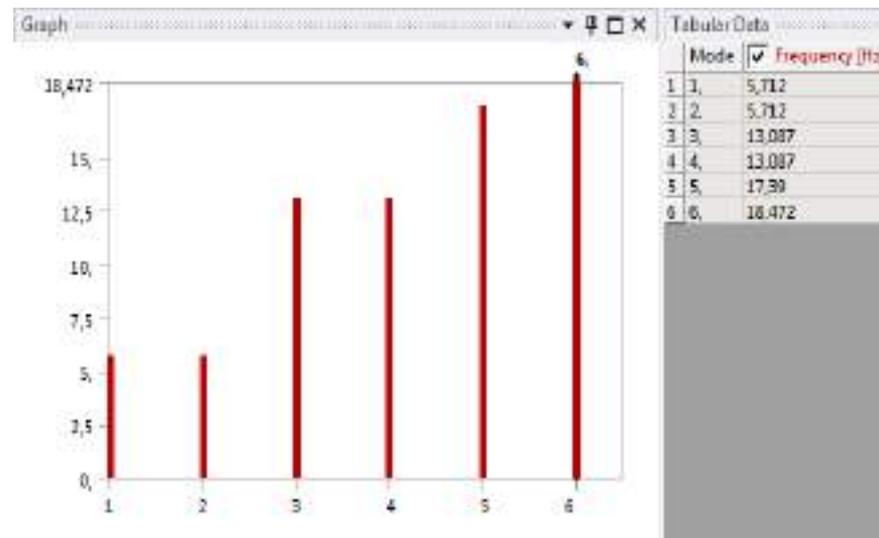


Рис.14. Первые шесть собственных частот системы.

# Собственные частоты и формы колебаний трубы с учётом продольных усилий

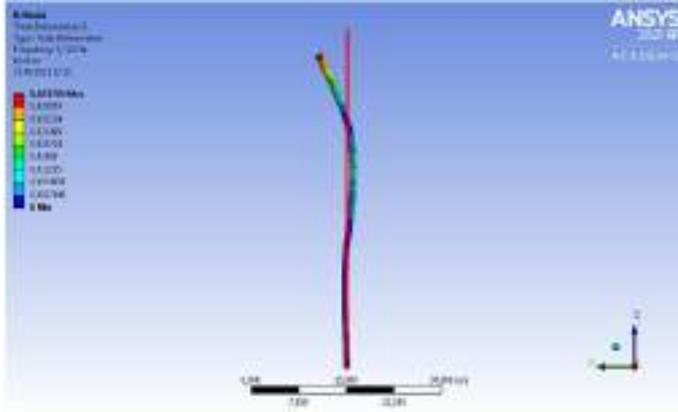


Рис.15. Первая собственная форма.

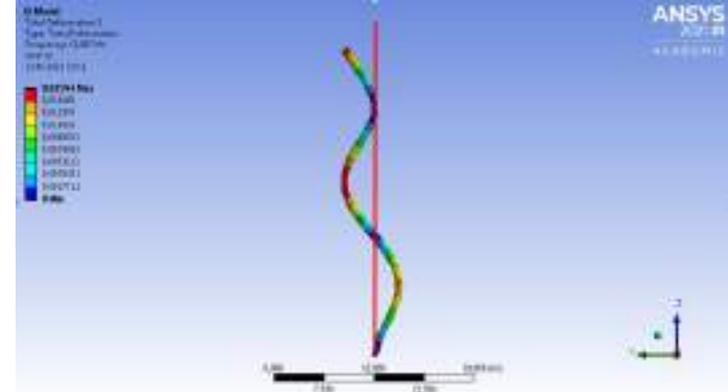


Рис.16. Вторая собственная форма.

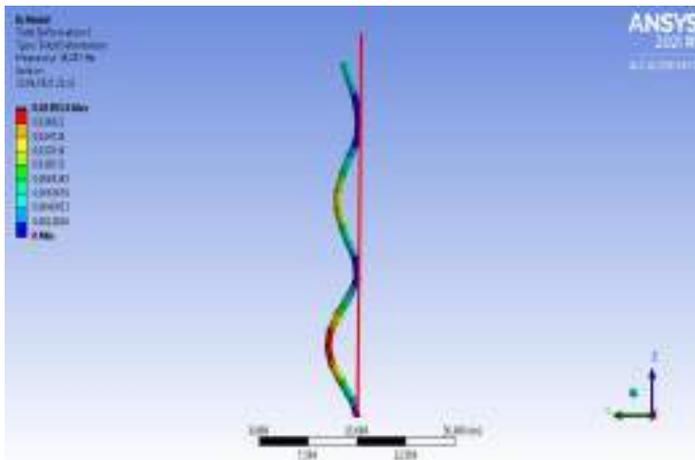


Рис.17. Третья собственная форма.

$$\omega_1 = 5.712 \quad \text{Гц}$$

$$\omega_2 = 13.087 \quad \text{Гц}$$

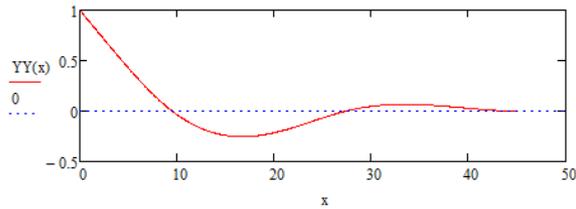
$$\omega_3 = 18.472 \quad \text{Гц}$$

# Верификация компьютерного исследования

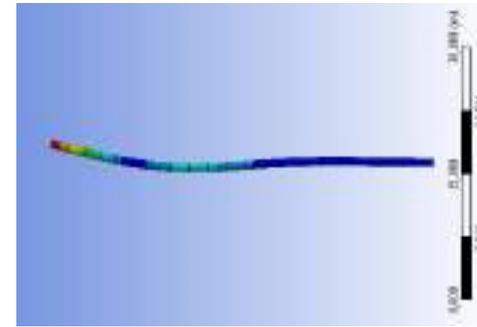
Табл.1. Сравнение точного и численного решения без учёта продольных сил.

Точная аналитическая форма.

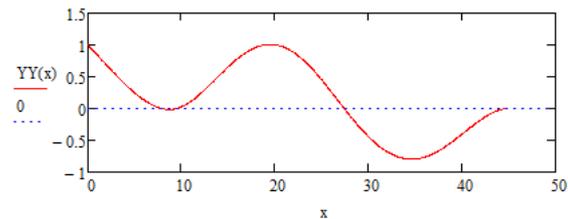
Форма, посчитанная в Ansys.



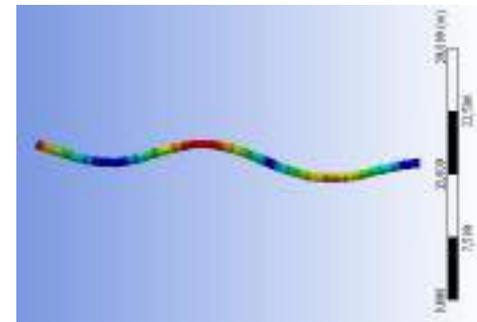
$$\omega_1 = 5.787 \text{ Гц}$$



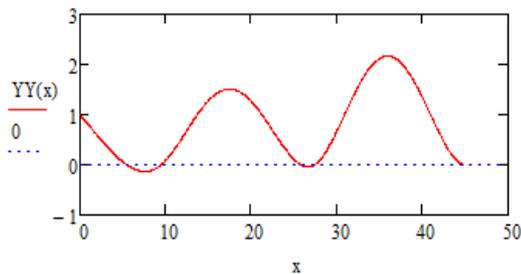
$$\omega_1 = 5.718 \text{ Гц}$$



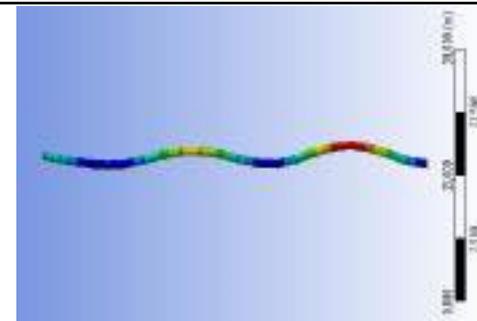
$$\omega_2 = 13.473 \text{ Гц}$$



$$\omega_2 = 13.09 \text{ Гц}$$



$$\omega_3 = 19.387 \text{ Гц}$$



$$\omega_3 = 18.486 \text{ Гц}$$

# Анализ результатов

Табл.2. Сравнение собственных частот различных решений.

Точный аналитический метод без учёта продольных сил, Гц.	Метод Рэлея с учётом продольных сил, Гц.	Численное решение без учёта продольных сил, Гц.	Численное решение с учётом продольных сил, Гц.
$\omega_1 = 5.787$	$\omega_1 = 5.781$	$\omega_1 = 5.718$	$\omega_1 = 5.712$
$\omega_2 = 13.473$	$\omega_2 = 13.46$	$\omega_2 = 13.09$	$\omega_2 = 13.087$
$\omega_3 = 19.387$	$\omega_3 = 19.375$	$\omega_3 = 18.486$	$\omega_3 = 18.472$

Табл.3. Снижение собственных частот при приложении заданной сжимающей силы.

Теоретическое исследование	Компьютерное исследование
-0.104%	-0.105%
-0.096%	-0.023
-0.062%	-0.023%

Относительная погрешность метода Рэлея.

$$\delta_1 = \left| \frac{\omega_{1 \text{ Ansys}} - \omega_{1 \text{ Рэлея}}}{\omega_{1 \text{ Ansys}}} \right| = 1.207\%$$

$$\delta_2 = \left| \frac{\omega_{2 \text{ Ansys}} - \omega_{2 \text{ Рэлея}}}{\omega_{2 \text{ Ansys}}} \right| = 2.85\%$$

$$\delta_3 = \left| \frac{\omega_{3 \text{ Ansys}} - \omega_{3 \text{ Рэлея}}}{\omega_{3 \text{ Ansys}}} \right| = 6.898\%$$

# Заключение

- Сформированы задачи для реализации поставленной цели.
- Собраны данные об объекте – дымовой трубе котельной ИГЭУ.
- Проведён литературный обзор по теме собственных частот и форм свободных колебаний.
- Выполнено теоретическое исследование динамических характеристик дымовой трубы при помощи метода начальных параметров и приближённого энергетического метода Рэля в программе Mathcad.
- Выполнено компьютерное исследование динамических характеристик дымовой трубы при помощи метода конечных элементов в программном комплексе Ansys.
- Проведён сравнительный анализ методов расчёта. Установлена относительная погрешность приближённого метода Рэля по первым трём собственным частотам.
- Проанализировано влияние сжимающей силы на собственную частоту колебаний системы.